1964年東大理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通

$A(t,t^2), P(\alpha,\beta)$ とすると、AP を $m:n$ に内分する点 B は $\left(\dfrac{nt+m\alpha}{m+n}, \dfrac{nt^2+m\beta}{m+n}\right)$ である。

これが $y=3x^2+24x+50$ 上にあるので $\dfrac{nt^2+m\beta}{m+n}=3\left(\dfrac{nt+m\alpha}{m+n}\right)^2+24\cdot\dfrac{nt+m\alpha}{m+n}+50$

$$(m+n)(nt^2+m\beta)=3(nt+m\alpha)^2+24(m+n)(nt+m\alpha)+50(m+n)^2$$
$$n(m+n)t^2+m(m+n)\beta=3(n^2t^2+2mn\alpha t+m^2\alpha^2)+24n(m+n)t+24\alpha m(m+n)+50(m+n)^2$$
$$(2n^2-mn)t^2+\{6mn\alpha+24n(m+n)\}t+50(m+n)^2+(24\alpha-\beta)m(m+n)+3m^2\alpha^2=0$$
$$n(2n-m)t^2+6n\{m\alpha+4(m+n)\}t+50(m+n)^2+(24\alpha-\beta)m(m+n)+3m^2\alpha^2=0$$

これが任意の t について成立し、$m>0, n>0$ であるから

$$\begin{cases} 2n-m=0 & \text{——①} \\ m\alpha+4(m+n)=0 & \text{——②} \\ 50(m+n)^2+(24\alpha-\beta)m(m+n)+3m^2\alpha^2=0 & \text{——③} \end{cases}$$

①より　$\therefore m=2n$　②に代入すると　$2n\alpha+12n=2n(\alpha+6)=0$　$\therefore \alpha=-6$

③に $m=2n, \alpha=-6$ を代入して、

$$450n^2-(144+\beta)\cdot 6n^2+432n^2=0 \quad n^2\{75-(144+\beta)+72\}=0 \quad n^2(3-\beta)=0 \quad \therefore \beta=3$$

以上により　$P(-6,3)$　$m:n=2:1$　……(答)