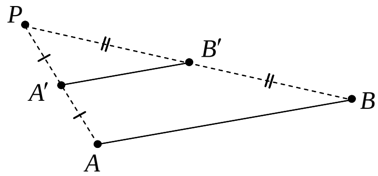
1965 年東大文 $\boxed{5}$

Q を固定し、P を動かしたときを考える。円 O を $x^2+y^2=1$、$Q(q,0)$ としても一般性を失わない。
O 内の任意の点を $P(x,y)$ としたとき、$x^2+y^2 \leqq 1$ で、PQ の中点 R を (r,s) とすると

$r=\dfrac{x+q}{2},\ s=\dfrac{y}{2}$　$x=2r-q,\ y=2s$　$x^2+y^2 \leqq 1$ に代入すると　$(2r-q)^2+4s^2 \leqq 1$　$\therefore \left(r-\dfrac{q}{2}\right)^2+s^2 \leqq \dfrac{1}{4}$

したがって、R は OQ の中点を中心とし、半径 $\dfrac{1}{2}$ の円内を動く。Q が円 O の内部にあっても同様である。

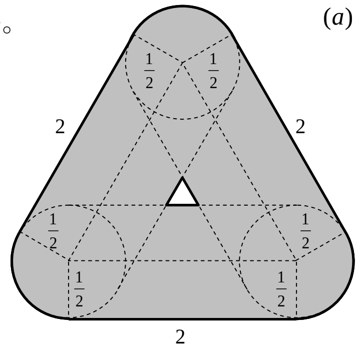
次に、P を固定し、Q を動かしたときを考える。
Q が長さ 4 の線分 AB 上を動くとき、PA の中点を A'、PB の中点を B' とすると、
PQ の中点 R は線分 $A'B'$ 上を動く。
△ PAB と△ $PA'B'$ の相似性から $AB // A'B'$ であり、$A'B'$ の長さは 2 である。
P が AB と一直線上にあるときも同様である。



したがって、P を固定し、Q が 1 辺の長さ 4 の正三角形 ABC の周上を動くとき、R は 1 辺の長さ 2 の正三角形上を動く。P が正三角形 ABC の内部や周上、各辺の延長上にあっても同様である。

以上の議論により、R が動く範囲は円 O と正三角形 ABC の位置関係に依存しない。
R が動く範囲は、半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の中心を 1 辺が 2 の正三角形の周に沿って動かしたときにできる図形となり、右図(a)の通り。

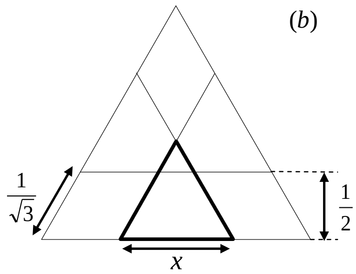
(a)



ここで、中央にできる穴の面積を求める。
右図(b)の x の長さは $2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ であり、
太線部は 1 辺が $2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ の正三角形であるから、中央の穴の 1 辺の長さは

$$x-\frac{1}{\sqrt{3}}=2-\frac{3}{\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

(b)



R が動く範囲の面積は、

$$\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2-\sqrt{3})^2=\frac{\pi}{4}+3+\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(7-4\sqrt{3})=\frac{\pi}{4}+6-\frac{3}{4}\sqrt{3}\quad\cdots\cdots(答)$$