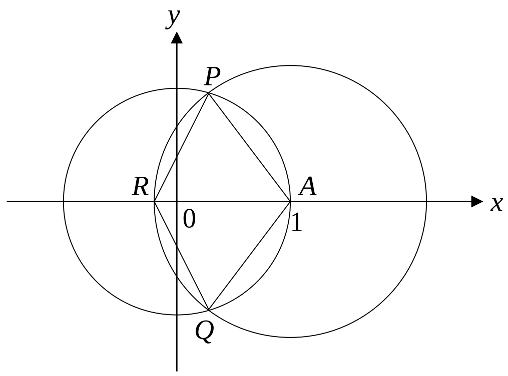
1966 年東大文 $\boxed{4}$

xy 平面において、定円 O の方程式を　$x^2+y^2=1$ ——① とし、$A(1,\ 0)$ とする。
A を中心とした円の半径を $r\,(0<r<2)$ とすると、$AR=r$ であり、
その方程式は　$(x-1)^2+y^2=r^2$ ——② である。



$P,\ Q$ の座標を求める。

②－①より　$-2x+1=r^2-1$　$2x=2-r^2$　$x=1-\frac{1}{2}r^2$

$$y^2=1-x^2=1-\left(1-\frac{1}{2}r^2\right)^2=r^2-\frac{1}{4}r^4 \quad \therefore y=\pm\sqrt{r^2-\frac{1}{4}r^4}$$

四辺形 $APRQ$ の面積は、$S(r)=r\times\sqrt{r^2-\frac{1}{4}r^4}=\sqrt{r^4-\frac{1}{4}r^6}$ で与えられる。

$r^2=t\,(0<t<4)$ とおき、$f(t)=t^2-\frac{1}{4}t^3$ の増減を調べる。　$f'(t)=2t-\frac{3}{4}t^2=\frac{3}{4}t\left(\frac{8}{3}-t\right)$

$f(t)$ の増減は右の通りで、$t=\frac{8}{3}$ において最大となる。

t	0	$\cdots$	$\frac{8}{3}$	$\cdots$	4
$f'(t)$		＋	0	－	
$f(t)$		↗		↘	

$f\left(\frac{8}{3}\right)=\left(\frac{8}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3}\right)=\left(\frac{8}{3}\right)^2\frac{1}{3}$ より、求める最大値は

$\frac{8}{3\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{9}$　……(答)