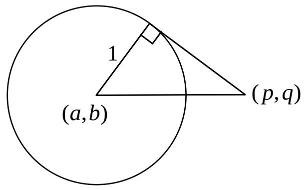
1967 年東大文 $\boxed{2}$



円 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$ の外部の点 (p,q) から円に接線を引いたとき、

(p,q) から接点までの距離は $\sqrt{(p-a)^2+(q-b)^2-1}$ である。

今、 $P(p,q)$ は円 A,B,C の外部にあるとして、

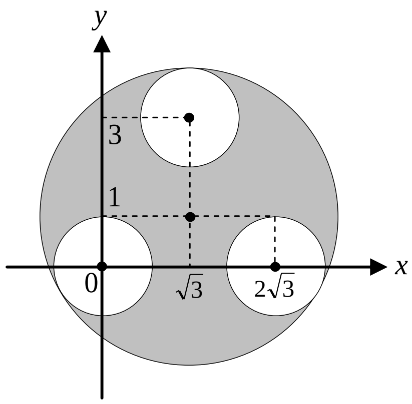
$$\overline{PR}^2=p^2+q^2-1,\ \overline{PS}^2=(p-2\sqrt{3})^2+q^2-1,\ \overline{PT}^2=(p-\sqrt{3})^2+(q-3)^2-1$$

$$\begin{aligned}\overline{PR}^2+\overline{PS}^2+\overline{PT}^2&=p^2+q^2-1+(p-2\sqrt{3})^2+q^2-1+(p-\sqrt{3})^2+(q-3)^2-1\\&=p^2+q^2-1+p^2-4\sqrt{3}p+12+q^2-1+p^2-2\sqrt{3}p+3+q^2-6q+9-1\\&=3p^2+3q^2-6\sqrt{3}p-6q+21<36\end{aligned}$$

$$p^2+q^2-2\sqrt{3}p-2q-5<0 \quad \therefore (p-\sqrt{3})^2+(q-1)^2<9$$

したがって、 P は円 $(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=9$ の内部にある。この円を D とすると、
D の中心 $(\sqrt{3},1)$ と $A(0,0), B(2\sqrt{3},0), C(\sqrt{3},3)$ までの距離はいずれも 2 であるから、円 A, B, C は円 D に内接している。また、点 A, B, C 間の距離はいずれも $2\sqrt{3}$ であるから、円 A, B, C は重ならない。

P の存在範囲は円 A, B, C の外部かつ円 D の内部であるから、
図の網掛部である。境界線を含まない。



面積は　$\pi\cdot 3^2-3\times\pi\cdot 1^2=6\pi$　……(答)