1967年東大文 $\boxed{5}$

$\dfrac{x^2}{a}+ay^2=1$ より　$y^2a^2-a+x^2=0$

$f(a)=y^2a^2-a+x^2$ として、a に関する方程式 $f(a)=0$ が、$a>0$ の範囲で実数解を持つ条件を考える。

$y=0$ とすると、$x^2=a$ より $x=\pm\sqrt{a}$ であるから、x は0以外のすべての実数を動く。

$y\neq 0$ のとき　$f(a)=y^2a^2-a+x^2=y^2\left(a-\dfrac{1}{2y^2}\right)^2-\dfrac{1}{4y^2}+x^2$

軸 $\dfrac{1}{2y^2}>0$、$f(0)=x^2\geqq 0$ であるから

$f\left(\dfrac{1}{2y^2}\right)=-\dfrac{1}{4y^2}+x^2\leqq 0$　$x^2y^2\leqq\dfrac{1}{4}$　$\therefore |xy|\leqq\dfrac{1}{2}$ ……(答)　ただし、原点を除く。

対称性より、図示すると右図の通り。
境界線を含むが、原点を除く。