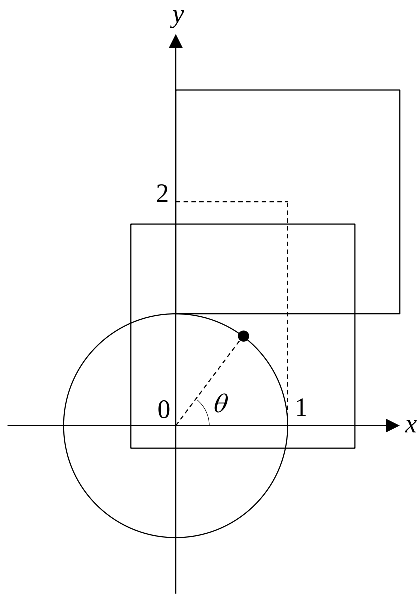
1967 年東大理 $\boxed{3}$



正方形 A の中心を、$(\cos\theta, \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とする。
正方形 A の上辺の y 座標は $\sin\theta + 1$ であり、これは正方形 B の上辺の y 座標 3 より大きくなることはない。
正方形 A の右辺の x 座標は $\cos\theta + 1$ であり、これは正方形 B の右辺の x 座標 2 より大きくなることはない。

正方形 A と B が、共通範囲を持つ条件は

$\sin\theta + 1 > 1,\ \cos\theta + 1 > 0 \quad \sin\theta > 0,\ \cos\theta > -1 \quad \therefore 0 < \theta < \pi$ ——①

①の範囲で、正方形 A と B の、共通範囲の面積は

$$S(\theta) = \sin\theta(\cos\theta + 1) = \sin\theta\cos\theta + \sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta + \sin\theta$$

$$S'(\theta) = \cos 2\theta + \cos\theta = 2\cos^2\theta - 1 + \cos\theta = (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$$

$S(\theta)$ の増減は右の通りで、$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき極大となる。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗		↘	

求める最大値は

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\pi + \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$