1967年東大理 $\boxed{5}$ 新

$y=ax^2$ と $y=\log_e x$ の接点の x 座標を t とすると　$at^2=\log_e t$ ――①

$x=t$ における接線の傾きが一致するので　$2at=\dfrac{1}{t}$　$t^2=\dfrac{1}{2a}$ ――②

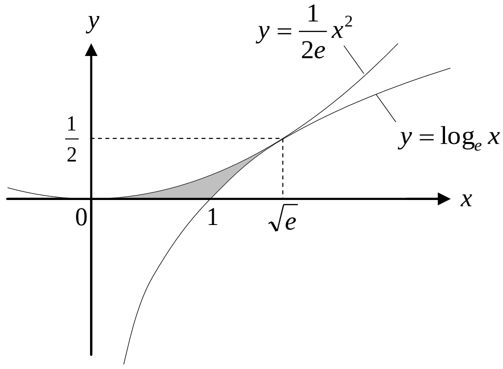
①に代入して　$\log_e t=\dfrac{1}{2}$　$t=\sqrt{e}=\sqrt{\dfrac{1}{2a}}$　$e=\dfrac{1}{2a}$　$\therefore a=\dfrac{1}{2e}$ ……(答)

求める面積は

$$\frac{1}{2e}\int_0^{\sqrt{e}} x^2dx-\int_1^{\sqrt{e}}\log_e xdx$$

$$=\frac{1}{2e}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{e}}-\left[x\log_e x-x\right]_1^{\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}}{6}-\left(-\frac{\sqrt{e}}{2}+1\right)$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{e}-1$$ ……(答)



1967 年東大理 $\boxed{5}$ 旧　※2015. 10. 19 修正しました。

$y=2\sin x$ と $y=a-\cos 2x$ の接点の x 座標を $t\ (0\leqq t\leqq 2\pi)$ とすると

$$2\sin t=a-\cos 2t \quad \therefore a=2\sin t+\cos 2t \quad \text{——①}$$

$x=t$ における接線の傾きが一致するので

$$2\cos t=2\sin 2t=4\sin t\cos t \quad \cos t(2\sin t-1)=0 \quad \text{——②}$$

②より、$\cos t=0$ または $\sin t=\dfrac{1}{2}$

$\cos t=0$ のとき　$t=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi$　①より　$t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $a=2-1=1$　$t=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき $a=-2-1=-3$

$\sin t=\dfrac{1}{2}$ のとき　$t=\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5}{6}\pi$　①より　$a=2\sin t+\cos 2t=2\sin t+1-2\sin^2 t=2\cdot\dfrac{1}{2}+1-2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{2}$

以上により、$\therefore a=-3,\ 1,\ \dfrac{3}{2}$　……(答)

それぞれ図示すると、下の通りである。