1967 年東大理 $\boxed{1}$ 文 $\boxed{1}$ 共通

$f(x)=ax^{n+1}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}-x$ とすると　$f'(x)=a(n+1)x^n-1$

$f(x)$ の増減は右の通りで、 $x=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a(n+1)}}$ のとき極小となる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt[n]{a(n+1)}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a(n+1)}}\right)=a\cdot\frac{1}{a(n+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{a(n+1)}}+\frac{1}{\sqrt[n]{a}}-\frac{1}{\sqrt[n]{a(n+1)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\left\{\frac{1}{(n+1)\sqrt[n]{n+1}}+1-\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}\right\}>0$$

したがって、 $x\geqq 0$ において $f(x)>0$ であるから　$\therefore ax^{n+1}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}>x$　（証明終）