

1971年東大理Ⅰ文Ⅰ共通

$$y = \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(t - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$x^2 + y^2 = 4\cos^2\left(t - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(t - \frac{\pi}{6}\right) = 3\cos^2\left(t - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = \frac{3}{2}\left\{1 + \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)\right\} + 1 = \frac{3}{2}\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{5}{2}$$

$0 \leq t \leq \pi$ より、 $-\frac{\pi}{3} \leq 2t - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{3}\pi$ であるから

$2t - \frac{\pi}{3} = 0$ $t = \frac{\pi}{6}$ のとき $\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ であるから、 $x^2 + y^2$ は最大値4をとる。

$2t - \frac{\pi}{3} = \pi$ $t = \frac{2}{3}\pi$ のとき $\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) = -1$ であるから、 $x^2 + y^2$ は最小値1をとる。

求める距離の最大値、最小値は $t = \frac{\pi}{6}$ のとき最大値2、 $t = \frac{2}{3}\pi$ のとき最小値1 ……(答)

(注)

(x, y) は楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上の点であり、

動く範囲は右図の実線部である。

