1971 年東大理 $\boxed{3}$ 文 $\boxed{3}$ 共通

$$\{f(x)-ax-b\}^2=\{f(x)\}^2+-2axf(x)-2bf(x)+a^2x^2+2abx+b^2$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\{f(x)-ax-b\}^2dx&=\int_0^1\{f(x)\}^2dx-2a\int_0^1xf(x)dx-2b\int_0^1f(x)dx+a^2\int_0^1x^2dx+2ab\int_0^1xdx+b^2\int_0^1dx\\&=\int_0^1\{f(x)\}^2dx-6a-4b+a^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+ab\left[x^2\right]_0^1+b^2\\&=\int_0^1\{f(x)\}^2dx+\frac{1}{3}a^2+ab+b^2-6a-4b\end{aligned}$$

$\int_0^1\{f(x)\}^2dx$ は定数であり、$\frac{1}{3}a^2+ab+b^2-6a-4b$ が最小であればよい。

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}a^2+ab+b^2-6a-4b&=b^2+(a-4)b+\frac{1}{3}a^2-6a=\left(b+\frac{a-4}{2}\right)^2-\frac{(a-4)^2}{4}+\frac{1}{3}a^2-6a\\&=\left(b+\frac{a-4}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}a^2-2a+4\right)+\frac{1}{3}a^2-6a=\left(b+\frac{a-4}{2}\right)^2+\frac{1}{12}a^2-4a-4\\&=\left(b+\frac{a-4}{2}\right)^2+\frac{1}{12}(a-24)^2-52\end{aligned}$$

したがって、$b+\frac{a-4}{2}=0,\ a=24$ のとき最小になるから　$\therefore a=24,\ b=-10$ ……(答)