1972 年東大理 $\boxed{4}$

$x=-4,\ \pm1$ のとき、 $f(x)-kg(x)\neq 0$ であるから、 $k=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ として考えてよい。

$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2(x+8)}{(x^2-1)(x+4)}$ とすると

$$h'(x)=\frac{\{2x(x+8)+x^2\}(x^2-1)(x+4)-x^2(x+8)\{2x(x+4)+x^2-1\}}{(x^2-1)^2(x+4)^2}$$
$$=\frac{x\{(3x+16)(x^3+4x^2-x-4)-(x^2+8x)(3x^2+8x-1)\}}{(x^2-1)^2(x+4)^2}$$
$$=\frac{x\{(3x^4+12x^3-3x^2-12x+16x^3+64x^2-16x-64)-(3x^4+8x^3-x^2+24x^3+64x^2-8x)\}}{(x^2-1)^2(x+4)^2}$$
$$=-\frac{x(4x^3+2x^2+20x+64)}{(x^2-1)^2(x+4)^2}=-\frac{2x(x+2)(2x^2-3x+16)}{(x^2-1)^2(x+4)^2}$$

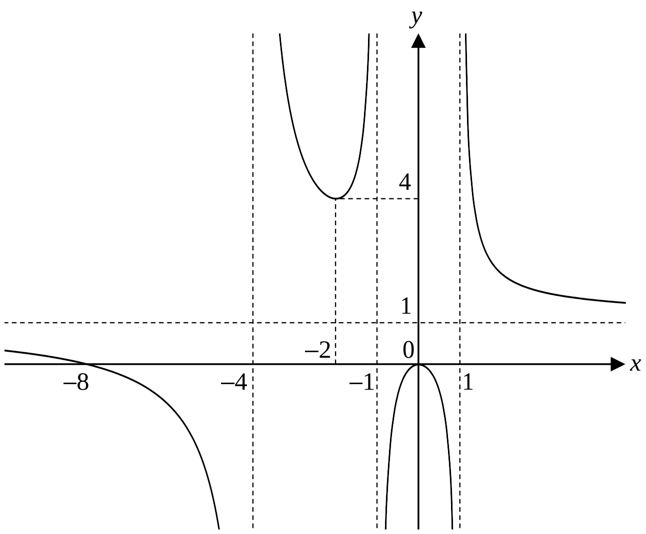
$2x^2-3x+16=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{119}{8}>0$ より、 $h(x)$ の増減は下の通り。

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	／	$-$	0	$+$	／	$+$	0	$-$	／	$-$
$h(x)$	↘	／	↘		↗	／	↗		↘	／	↘

$h(x)=\dfrac{1+\dfrac{8}{x}}{\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(1+\dfrac{4}{x}\right)}$ より　$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}h(x)=1$

$y=h(x)$ のグラフの概形は右図の通り。

$x=-4,\ x=\pm1,\ y=1$ は漸近線である。



これと $y=k$ との共有点の個数を考えればよいから

$$\therefore\begin{cases} k=1 \text{のとき} & 0\text{個} \\ 0<k<1,\ 1<k<4 \text{のとき} & 1\text{個} \\ k=0,\ 4 \text{のとき} & 2\text{個} \\ k<0,\ 4<k \text{のとき} & 3\text{個} \end{cases}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$