1973年東大理 $\boxed{4}$

座標平面において、S の中心を $O(0,\ 0)$、4つの頂点を $\left(\pm\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{1}{2}\right)$（複号任意）としても一般性を失わない。

$P(a,\ b)$ とすると、共通部分 $S\cap T(P)$ が存在する条件は　$|a|<1,\ |b|<1$ ——①

①の条件下で、S と $T(P)$ の x 方向の重なり幅を l とすると　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-l=|a|$　$\therefore l=1-|a|$

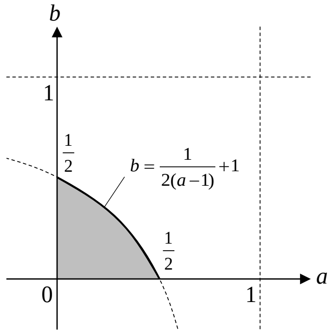
同様に、S と $T(P)$ の y 方向の重なり幅は、$1-|b|$ である。

共通部分 $S\cap T(P)$ の面積は　$(1-|a|)(1-|b|)\geqq\dfrac{1}{2}$ ——②

対称性より、$0\geqq a,\ 0\geqq b$ について考えると、$0\leqq a<1,\ 0\leqq b<1$ で、

$$(1-a)(1-b)\geqq\frac{1}{2}\quad 1-b\geqq\frac{1}{2(1-a)}\quad \therefore b\leqq\frac{1}{2(a-1)}+1$$

$0\leqq a<1,\ 0\leqq b<1,\ b\leqq\dfrac{1}{2(a-1)}+1$ を図示すると、右図の通り。



この面積は　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2(a-1)}+1\right\}da=\left[\frac{1}{2}\log|a-1|+a\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2$

対称性より、P の存在範囲は右図の通りで、

面積は　$4\times\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\log 2\right)=2-2\log 2$　……（答）