1974 年東大文 $\boxed{4}$

$f(x)=-\dfrac{1}{\alpha^2}x^2+\dfrac{2\alpha-1}{\alpha^2}x-1+\dfrac{1}{\alpha}$ とすると

$$f(x)=-\frac{1}{\alpha^2}\left\{x^2-(2\alpha-1)x\right\}-1+\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{\alpha^2}\left\{x-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\right\}^2+\frac{1}{\alpha^2}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2-1+\frac{1}{\alpha}$$

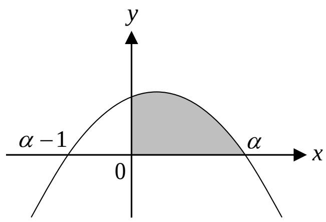
$$=-\frac{1}{\alpha^2}\left\{x-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\right\}^2+\frac{1}{4\alpha^2}$$

$y\leqq f(x)$ が第 1 象限と共通部分 B を持つ条件は

i）$f(0)>0$　ii）$f(0)\leqq 0$ かつ 軸 $\alpha-\dfrac{1}{2}>0$

のいずれかである。$f(x)=-\dfrac{1}{\alpha^2}(x-\alpha)\left\{x-(\alpha-1)\right\}$ より、B の面積 $S(\alpha)$ は

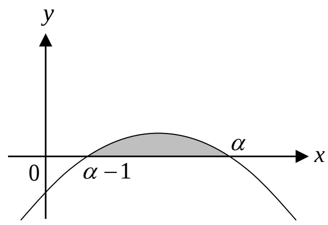
i）のとき　$f(0)=-1+\dfrac{1}{\alpha}>0$　$0<\alpha<1$ のとき



$$S(\alpha)=-\frac{1}{\alpha^2}\int_0^{\alpha}(x-\alpha)\left\{x-(\alpha-1)\right\}dx=-\frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{x^3}{3}-(2\alpha-1)\frac{x^2}{2}+(\alpha^2-\alpha)x\right]_0^{\alpha}$$

$$=-\frac{1}{\alpha^2}\left\{\frac{\alpha^3}{3}-(2\alpha-1)\frac{\alpha^2}{2}+\alpha^3-\alpha^2\right\}=-\frac{\alpha}{3}+\alpha-\frac{1}{2}-\alpha+1=-\frac{\alpha}{3}+\frac{1}{2}$$

ii）のとき　$f(0)=-1+\dfrac{1}{\alpha}\leqq 0$　$\alpha>\dfrac{1}{2}$　結局 $1\leqq\alpha$ のとき



$$S(\alpha)=-\frac{1}{\alpha^2}\int_{\alpha-1}^{\alpha}(x-\alpha)\left\{x-(\alpha-1)\right\}dx=\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{\left\{\alpha-(\alpha-1)\right\}^3}{6}=\frac{1}{6\alpha^2}$$

以上により

$0<\alpha<1$ のとき $S(\alpha)=-\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{1}{2}$、$1\leqq\alpha$ のとき $S(\alpha)=\dfrac{1}{6\alpha^2}$　……(答)

グラフは右図の通り。