1974 年東大理 $\boxed{4}$

1)、2) より

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x},\ g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(0+x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}$$ が存在する。

4) より

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{ax+bf(x)}{cx+f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{a+b\dfrac{f(x)}{x}}{c+\dfrac{f(x)}{x}}=\frac{a+bf'(0)}{c+f'(0)}$$

$$f'(0)\{c+f'(0)\}=a+bf'(0)\qquad \therefore \{f'(0)\}^2+(c-b)f'(0)-a=0$$

同様に、$\{g'(0)\}^2+(c-b)g'(0)-a=0$ も導かれる。
3) より $f'(0)\neq g'(0)$ であるから、$f'(0),\ g'(0)$ は $t^2+(c-b)t-a=0$ の相違なる 2 解である。

解と係数の関係より $f'(0)g'(0)=-a$ 、3) より $f'(0)g'(0)=-1$ であるから　$\therefore a=1$ ……(答)

なお、このとき $D=(c-b)^2+4>0$ であり、$t^2+(c-b)t-1=0$ は相違なる 2 実数解を持つ。