1974年東大理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通

(1)

長さlの線分の両端の点を、$P(p,\ p^2),\ Q(q,\ q^2)\ (p<q)$とする。$M(x,\ y)$とすると

$$x=\frac{q+p}{2} \qquad \therefore q+p=2x \text{ ——①}$$

$$l^2=(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=(q-p)^2\left\{1+(q+p)^2\right\}$$

①より　$(q-p)^2=(q+p)^2-4pq=4x^2-4pq=\dfrac{l^2}{1+4x^2}$　　$\therefore pq=x^2-\dfrac{l^2}{4(1+4x^2)}$ ——②

$y=\dfrac{q^2+p^2}{2}=\dfrac{(q+p)^2-2pq}{2}$であるから、①と②より

$$\therefore y=2x^2-\left\{x^2-\frac{l^2}{4(1+4x^2)}\right\}=x^2+\frac{l^2}{4(1+4x^2)}$$

yが最小になればよい。$f(x)=x^2+\dfrac{l^2}{4(1+4x^2)}$とすると

$$f'(x)=2x-l^2\cdot\frac{8x}{4(1+4x^2)^2}=\frac{2x\left\{(1+4x^2)^2-l^2\right\}}{(1+4x^2)^2}=\frac{2x(1+4x^2+l)(1+4x^2-l)}{(1+4x^2)^2}$$

$l=1$のとき　$1+4x^2-l=4x^2\geqq 0$

増減表より、$f(x)$は$x=0$のとき最小値$\dfrac{1}{4}$をとる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

$l>1$のとき　$1+4x^2-l=(2x+\sqrt{l-1})(2x-\sqrt{l-1})$

増減表より、$f(x)$は$x=\pm\dfrac{\sqrt{l-1}}{2}$のとき極小となる。

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{l-1}}{2}\right)=\frac{l-1}{4}+\frac{l^2}{4\left\{(l-1)+1\right\}}=\frac{1}{2}l-\frac{1}{4}$$

x	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{l-1}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{l-1}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

以上により、求めるMの座標は　$l=1$のとき$\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$、$l>1$のとき$\left(\pm\dfrac{\sqrt{l-1}}{2},\ \dfrac{1}{2}l-\dfrac{1}{4}\right)$ ……(答)