1975 年東大文 $\boxed{3}$

$x^2=-(x-a)^2+b$ とすると　$2x^2-2ax+a^2-b=0$ ――①

$D/4=a^2-2(a^2-b)=2b-a^2>0$　$\therefore b>\dfrac{1}{2}a^2$ ――②

②の条件下で、①の相違なる 2 実数解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると、二つの放物線で囲まれる図形の面積は

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{-(x-a)^2+b-x^2\right\}dx=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=2\cdot\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}=\frac{(\beta-\alpha)^3}{3}=\frac{1}{3}$$

$(\beta-\alpha)^3=1$　$\therefore \beta-\alpha=1$

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=\dfrac{a^2-b}{2}$

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=a^2-2(a^2-b)=2b-a^2=1\quad\therefore b=\frac{a^2+1}{2}$$

これは②を満たす。

一方、$b=\dfrac{a^2+1}{2}$ のとき、①は

$$2x^2-2ax+a^2-\frac{a^2+1}{2}=2\left(x^2-ax+\frac{a^2-1}{4}\right)=2\left(x-\frac{a-1}{2}\right)\left(x-\frac{a+1}{2}\right)=0$$

$\alpha=\dfrac{a-1}{2},\ \beta=\dfrac{a+1}{2}$ より、$\beta-\alpha=1$ であるから　$\therefore S=\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{3}=\dfrac{1}{3}$

以上により、求める必要十分条件は　$\therefore b=\dfrac{a^2+1}{2}$ ……(答)