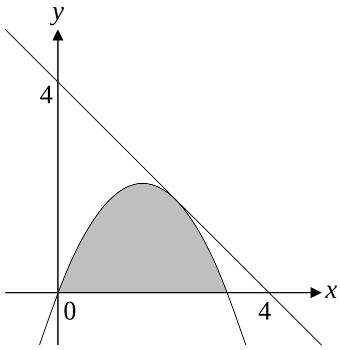
1975 年東大理 $\boxed{3}$



$-ax^2+bx=4-x$ とすると　$ax^2-(b+1)x+4=0$

　$D=(b+1)^2-16a=0$　$\therefore a=\dfrac{(b+1)^2}{16}$

このとき　$\dfrac{(b+1)^2}{16}x^2-(b+1)x+4=0$　$b\neq -1$ であるから

接点の x 座標は　$x^2-\dfrac{16}{b+1}x+\dfrac{64}{(b+1)^2}=0$　$\left(x-\dfrac{8}{b+1}\right)^2=0$　$\therefore x=\dfrac{8}{b+1}$

また、$-ax^2+bx=x(b-ax)$ の $x=0$ 以外の解は、$x=\dfrac{b}{a}=\dfrac{16b}{(b+1)^2}$ であるから

$\dfrac{16b}{(b+1)^2}>0$ より　$\therefore b>0$　このとき、$\dfrac{8}{b+1}>0$ も満たす。

放物線と x 軸の正の部分で囲まれる面積は　$-a\displaystyle\int_0^{\frac{b}{a}}x\left(x-\frac{b}{a}\right)dx=\frac{a}{6}\left(\frac{b}{a}\right)^3=\frac{b^3}{6a^2}=\frac{128b^3}{3(b+1)^4}$

$f(b)=\dfrac{b^3}{(b+1)^4}$ とすると　$f'(b)=\dfrac{3b^2(b+1)^4-4b^3(b+1)^3}{(b+1)^8}=\dfrac{3b^2(b+1)-4b^3}{(b+1)^5}=\dfrac{b^2(3-b)}{(b+1)^5}$

$f(b)$ の増減は右の通りで、$b=3$ のとき極大。

b	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(b)$		$+$	0	$-$
$f(b)$		$\nearrow$		$\searrow$

このとき $a=1$ で、$f(3)=\dfrac{27}{256}$ であるから

面積が最大となる a, b は　$\therefore a=1,\ b=3$ ……(答)　面積の最大値は　$\dfrac{128}{3}\cdot\dfrac{27}{256}=\dfrac{9}{2}$ ……(答)