1975年東大理 $\boxed{6}$

(1)

$0 \leqq x \leqq 4$ である。$n+1$ 回の操作後、A に x 個の赤玉が入っているためには

i) n 回の操作後、A に x 個の赤玉が入っており、A から赤玉が取り出されて赤玉が戻される。

ii) n 回の操作後、A に x 個の赤玉が入っており、A から白玉が取り出されて白玉が戻される。

iii) n 回の操作後、A に $x+1$ 個の赤玉が入っており、A から赤玉が取り出されて白玉が戻される。

iv) n 回の操作後、A に $x-1$ 個の赤玉が入っており、A から白玉が取り出されて赤玉が戻される。

のいずれかである必要がある。

i)の場合の確率は、A から赤玉を取り出す確率は $\dfrac{x}{4}$ であり、

A B C　　A B C

$$P_n(x)\times\left(\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\times1+\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\times\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{x}{8}+\frac{x}{12}\right)\cdot P_n(x)=\frac{5x}{24}\cdot P_n(x)$$

赤 赤 赤　　赤 白 赤

ii)の場合の確率は、A から白玉を取り出す確率は $\dfrac{4-x}{4}$ であり、

A B C　　A B C

$$P_n(x)\times\left(\frac{4-x}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\times\frac{1}{3}+\frac{4-x}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\times\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{4-x}{24}+\frac{4-x}{12}\right)\cdot P_n(x)=\frac{4-x}{8}\cdot P_n(x)$$

白 赤 赤　　白 白 赤

iii)の場合の確率は、A から赤玉を取り出す確率は $\dfrac{x+1}{4}$ であり、

A B C

$$P_n(x+1)\times\frac{x+1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\times\frac{1}{3}=\frac{x+1}{24}\cdot P_n(x+1)$$

赤 白 赤

iv)の場合の確率は、A から白玉を取り出す確率は $\dfrac{4-(x-1)}{4}=\dfrac{5-x}{4}$ であり、

A B C　　A B C

$$P_n(x-1)\times\left(\frac{5-x}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\times\frac{2}{3}+\frac{5-x}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\times\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{5-x}{12}+\frac{5-x}{24}\right)\cdot P_n(x-1)=\frac{5-x}{8}\cdot P_n(x-1)$$

白 赤 赤　　白 白 赤

以上の和をとれば、

$$\therefore P_{n+1}(x)=\left(\frac{5x}{24}+\frac{4-x}{8}\right)\cdot P_n(x)+\frac{x+1}{24}\cdot P_n(x+1)+\frac{5-x}{8}\cdot P_n(x-1)$$

$$=\frac{1}{12}(6+x)\cdot P_n(x)+\frac{1}{24}(1+x)\cdot P_n(x+1)+\frac{1}{8}(5-x)\cdot P_n(x-1)$$

(証明終)

(2)

(1)より、 $x=0,1,2,3,4$ を代入して、以下の関係式を得る。

$$\begin{cases} P_{n+1}(0)=\dfrac{1}{2}P_n(0)+\dfrac{1}{24}P_n(1) \\ P_{n+1}(1)=\dfrac{7}{12}P_n(1)+\dfrac{1}{12}P_n(2)+\dfrac{1}{2}P_n(0) \\ P_{n+1}(2)=\dfrac{2}{3}P_n(2)+\dfrac{1}{8}P_n(3)+\dfrac{3}{8}P_n(1) \\ P_{n+1}(3)=\dfrac{3}{4}P_n(3)+\dfrac{1}{6}P_n(4)+\dfrac{1}{4}P_n(2) \\ P_{n+1}(4)=\dfrac{5}{6}P_n(4)+\dfrac{1}{8}P_n(3) \end{cases}$$

$E_n=P_n(1)+2\cdot P_n(2)+3\cdot P_n(3)+4\cdot P_n(4)$ であり、 $P_n(0)=1-\{P_n(1)+P_n(2)+P_n(3)+P_n(4)\}$ であるから

$$\begin{aligned} E_{n+1}&=P_{n+1}(1)+2\cdot P_{n+1}(2)+3\cdot P_{n+1}(3)+4\cdot P_{n+1}(4) \\ &=\frac{7}{12}P_n(1)+\frac{1}{12}P_n(2)+\frac{1}{2}\{1-P_n(1)-P_n(2)-P_n(3)-P_n(4)\}+2\cdot\left\{\frac{2}{3}P_n(2)+\frac{1}{8}P_n(3)+\frac{3}{8}P_n(1)\right\} \\ &\quad+3\cdot\left\{\frac{3}{4}P_n(3)+\frac{1}{6}P_n(4)+\frac{1}{4}P_n(2)\right\}+4\cdot\left\{\frac{5}{6}P_n(4)+\frac{1}{8}P_n(3)\right\} \\ &=\frac{5}{6}P_n(1)+\frac{5}{3}P_n(2)+\frac{5}{2}P_n(3)+\frac{10}{3}P_n(1)+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}\{P_n(1)+2\cdot P_n(2)+3\cdot P_n(3)+4\cdot P_n(4)\}+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\therefore E_{n+1}=\dfrac{5}{6}E_n+\dfrac{1}{2}$　最初は $x=1$ であるから　$P_1(1)=\dfrac{7}{12},\ P_1(2)=\dfrac{3}{8},\ P_1(3)=P_1(4)=0$　$E_1=\dfrac{7}{12}+2\cdot\dfrac{3}{8}=\dfrac{4}{3}$

$E_{n+1}-3=\dfrac{5}{6}(E_n-3)$　$E_n-3=(E_1-3)\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}=-\dfrac{5}{3}\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}=-2\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$　$\therefore E_n=3-2\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$　……(答)

(3)

$\therefore \lim_{n\to\infty}E_n=3$　……(答)