

1975年東大理 ②文 ②共通

$$\frac{(x+1)^k}{x^l} - 1 = \frac{(x+1)^m}{x^n} \quad \text{--- ①}$$

$k \neq 0$ かつ $m \neq 0$ のとき、 $x = -1$ とすると、①は $-1 = 0$ となり、不適。
したがって、少なくとも k か m のいずれか一方は 0 でなければならない。

i) $k = m = 0$ のとき

①は $\frac{1}{x^l} - 1 = \frac{1}{x^n}$ となるが、 $x = 1$ とすると、 $0 = 1$ となり、不適。

ii) $k = 0, m \neq 0$ のとき

①は $\frac{1}{x^l} - 1 = \frac{(x+1)^m}{x^n}$ となるが、 $x = 1$ とすると、 $0 = 2^m$ となり、不適。

iii) $k \neq 0, m = 0$ のとき

①は $\frac{(x+1)^k}{x^l} - 1 = \frac{1}{x^n}$ $x = 1$ とすると、 $2^k - 1 = 1$ $2^k = 2$ $\therefore k = 1$

$$\frac{x+1}{x^l} - 1 = \frac{1}{x^n} \quad \frac{x+1}{x^l} = \frac{1}{x^n} + 1 = \frac{x^n + 1}{x^n} \quad x^n(x+1) = x^l(x^n + 1)$$

$x = 2$ とすると、 $2^n \cdot 3 = 2^l(2^n + 1)$ となり、左辺に含まれる素因数は 2 と 3 のみで、 3 は1つしか含まれない。
右辺と一致するためには、 $2^n + 1 = 3$ $2^n = 2$ $\therefore n = 1$ したがって $l = 1$ である。

このとき、①は $\frac{x+1}{x} - 1 = \frac{1}{x}$ となり、確かに 0 でないすべての x について成立。

以上により、 $\therefore k = 1, l = 1, m = 0, n = 1$ ……(答)