1976年東大理$\boxed{6}$新文$\boxed{4}$新共通

(1)

Rに属する2つの行列を、$xI+yA,\ uI+vA$とおく。

ケーリー=ハミルトンの定理より、$A^2=bA+aI$であるから、

$$(xI+yA)(uI+vA)=xuI+xvA+yuA+yvA^2=xuI+xvA+yuA+yv(bA+aI)$$
$$=(xu+ayv)I+(xv+yu+byv)A$$

したがって、Rに属する2つの行列の積は、Rに属する。(証明終)

(2)

$$xI+yA=x\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0&a\\1&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&ay\\y&x+by\end{pmatrix}\qquad \det(xI+yA)=x(x+by)-ay^2=x^2-ay^2+bxy$$

Rに属する任意の行列$xI+yA$が逆行列を持つには、$(x,y)=(0,0)$を除く任意の(x,y)について、$x^2-ay^2+bxy\neq 0$が成り立つことが必要である。すなわち、$ay^2-bxy-x^2=0$を満たす実数の組(x,y)が、$(x,y)=(0,0)$以外に存在しなければよい。

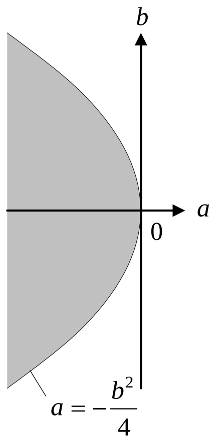
$a=0$のとき　$bxy+x^2=x(by+x)=0$　これは$x=0$とすれば任意のyについて成立する。したがって$a\neq 0$。

$ay^2-bxy-x^2=0$をyに関する2次方程式と見て、実数解を持たない条件を求めると、

$$D=b^2x^2+4ax^2=(4a+b^2)x^2<0$$

$(x,y)\neq(0,0)$のとき$x^2>0$で、求める条件は　$4a+b^2<0$　$\therefore a<-\dfrac{b^2}{4}$　……(答)

図示すると右の通り。境界線を含まない。



1976年東大文 $\boxed{4}$ 旧

$f(x)=x^5-ax-1$ が2つの正次数の整式の積で表されるとき、2つの整式の次数は、1次と4次、または2次と3次である。整数係数であることから、2つの整式の最上位の係数は1である。

i） $f(x)$ が1次式を因数に持つとき

1次の因数は $x-1$ または $x+1$ に限られる。

$x-1$ を因数に持つとき　$f(1)=1-a-1=-a=0$　$\therefore a=0$　$f(x)=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$x+1$ を因数に持つとき　$f(-1)=-1+a-1=a-2=0$　$\therefore a=2$　$f(x)=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x-1)$

ii） $f(x)$ が2次式を因数に持つとき

2次の因数は x^2+px+1 または x^2+px-1 と表せる。

x^2+px+1 を因数に持つとき、もう1つの因数は x^3+qx^2+rx-1 と表せて、

$$\begin{aligned}(x^2+px+1)(x^3+qx^2+rx-1)&=x^5+qx^4+rx^3-x^2+px^4+pqx^3+prx^2-px+x^3+qx^2+rx-1\\&=x^5+(p+q)x^4+(pq+r+1)x^3+(pr+q-1)x^2-(p-r)x-1\\&=x^5-ax-1\end{aligned}$$

係数を比較すると $\begin{cases}p+q=0 & \text{——①}\\ pq+r+1=0 & \text{——②}\\ pr+q-1=0 & \text{——③}\\ p-r=a & \text{——④}\end{cases}$

①より　$q=-p$ を②に代入すると　$-p^2+r+1=0$　$\therefore r=p^2-1$ ——⑤

③に代入して　$p(p^2-1)-p-1=0$　$p^3-2p-1=0$　$(p+1)(p^2-p-1)=0$

p は整数より　$\therefore p=-1,\ q=1,\ r=0$　④より　$\therefore a=-1$　$f(x)=(x^2-x+1)(x^3+x^2-1)$

x^2+px-1 を因数に持つとき、もう1つの因数は x^3+qx^2+rx+1 と表せて、

$$\begin{aligned}(x^2+px-1)(x^3+qx^2+rx+1)&=x^5+qx^4+rx^3+x^2+px^4+pqx^3+prx^2+px-x^3-qx^2-rx-1\\&=x^5+(p+q)x^4+(pq+r-1)x^3+(pr-q+1)x^2+(p-r)x-1\\&=x^5-ax-1\end{aligned}$$

係数を比較すると $\begin{cases}p+q=0 & \text{——①}\\ pq+r-1=0 & \text{——②}\\ pr-q+1=0 & \text{——③}\\ p-r=-a & \text{——④}\end{cases}$

①より　$q=-p$ を②に代入すると　$-p^2+r-1=0$　$\therefore r=p^2+1$ ——⑤

③に代入して　$p(p^2+1)+p+1=0$　$p^3+2p+1=0$　これは整数解を持たないので、不適。

以上により、$\therefore\begin{cases}a=-1 & f(x)=(x^2-x+1)(x^3+x^2-1)\\ a=0 & f(x)=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\\ a=2 & f(x)=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x-1)\end{cases}$ ……（答）