1976年東大理$\boxed{6}$新文$\boxed{4}$新共通

(1)

R に属する2つの行列を、$xI+yA,\ uI+vA$ とおく。

ケーリー=ハミルトンの定理より、$A^2=bA+aI$ であるから、

$$(xI+yA)(uI+vA)=xuI+xvA+yuA+yvA^2=xuI+xvA+yuA+yv(bA+aI)$$
$$=(xu+ayv)I+(xv+yu+byv)A$$

したがって、R に属する2つの行列の積は、R に属する。(証明終)

(2)

$$xI+yA=x\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0&a\\1&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&ay\\y&x+by\end{pmatrix}\qquad \det(xI+yA)=x(x+by)-ay^2=x^2-ay^2+bxy$$

R に属する任意の行列 $xI+yA$ が逆行列を持つには、$(x,y)=(0,0)$ を除く任意の (x,y) について、

$x^2-ay^2+bxy\neq 0$ が成り立つことが必要。すなわち、$ay^2-bxy-x^2=0$ を満たす実数の組 (x,y) が、

$(x,y)=(0,0)$ 以外に存在しなければよい。

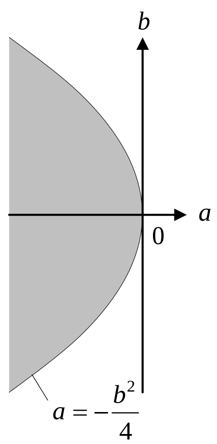
$a=0$ のとき　$bxy+x^2=x(by+x)=0$　これは $x=0$ とすれば任意の y について成立する。したがって $a\neq 0$。

$ay^2-bxy-x^2=0$ を y に関する2次方程式と見て、実数解を持たない条件を求めると、

$$D=b^2x^2+4ax^2=(4a+b^2)x^2<0$$

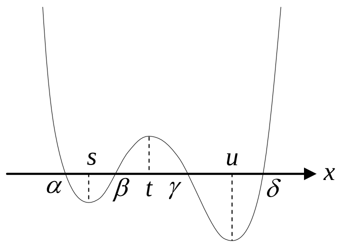
$(x,y)\neq(0,0)$ のとき $x^2>0$ で、求める条件は　$4a+b^2<0$　$\therefore a<-\dfrac{b^2}{4}$　……(答)

図示すると右の通り。境界線を含まない。



1976年東大理 $\boxed{6}$ 旧

（i）



条件により、$f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。

$x=\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は、$f(x)=0$ の相違なる 4 実数解である。

$x=s, t, u$ は、$f'(x)=0$ の相違なる 3 実数解であり、$f(x)$ の極値を与える。

$\alpha<s<\beta<t<\gamma<u<\delta$ であり、$f'(\alpha)<0,\ f'(\beta)>0,\ f'(\gamma)<0,\ f'(\delta)>0$

$g(x)=f(x)+kf'(x)$ とおく。$g(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d+k(4x^3+3ax^2+2bx+c)$ より

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty} x^4\left(1+\frac{a+4k}{x}+\frac{b+3ak}{x^2}+\frac{c+2bk}{x^3}+\frac{d+ck}{x^4}\right)=+\infty$$

$k=0$ のとき　$g(x)=f(x)$ であるから、$g(x)=0$ は相違なる 4 実数解を持つ。

$k>0$ のとき

$$g(\alpha)=kf'(\alpha)<0,\ g(\beta)=kf'(\beta)>0,\ g(\gamma)=kf'(\gamma)<0,\ g(\delta)=kf'(\delta)>0$$

であるから、$g(x)=0$ は $\alpha<x<\beta,\ \beta<x<\gamma,\ \gamma<x<\delta$ においてそれぞれ実数解を持つ。

また、$\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ より、$x<\alpha$ でも実数解を持つ。したがって、$g(x)=0$ の実数解は 4 個。

$k<0$ のとき

$$g(\alpha)=kf'(\alpha)>0,\ g(\beta)=kf'(\beta)<0,\ g(\gamma)=kf'(\gamma)>0,\ g(\delta)=kf'(\delta)<0$$

であるから、$g(x)=0$ は $\alpha<x<\beta,\ \beta<x<\gamma,\ \gamma<x<\delta$ においてそれぞれ実数解を持つ。

また、$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ より、$\delta<x$ でも実数解を持つ。したがって、$g(x)=0$ の実数解は 4 個。

以上により、すべての実数 k について、$f(x)+kf'(x)=0$ の実数解は 4 個。 ……(答)

（ii）

$f''(x)=0$ の 2 解は $f(x)$ の変曲点である。(i)の概形より、変曲点は $s<x<t$ および $t<x<u$ の区間にある。

したがって、$f(x)=0$ と $f''(x)=0$ が相違なる 2 実数解を共有するとき、それは $x=\beta$ および $x=\gamma$ である。

$f(x)=0$ に関する解と係数の関係より　$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-a$ ——①

$f''(x)=12x^2+6ax+2b=0$ に関する解と係数の関係より　$\beta+\gamma=-\dfrac{6a}{12}=-\dfrac{a}{2}$　$\therefore 2(\beta+\gamma)=-a$ ——②

①、②より　$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2(\beta+\gamma)$　$\therefore \alpha+\delta=\beta+\gamma$ ——③

$$\begin{aligned}
f(x)&=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)=\left\{x^2-(\alpha+\delta)x+\alpha\delta\right\}\left\{x^2-(\beta+\gamma)x+\beta\gamma\right\}\\
&=\left\{\left(x-\frac{\alpha+\delta}{2}\right)^2+\alpha\delta-\frac{(\alpha+\delta)^2}{4}\right\}\left\{\left(x-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2+\beta\gamma-\frac{(\beta+\gamma)^2}{4}\right\}\\
&=\left\{\left(x-\frac{\alpha+\delta}{2}\right)^2-\frac{(\alpha-\delta)^2}{4}\right\}\left\{\left(x-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2-\frac{(\beta-\gamma)^2}{4}\right\}
\end{aligned}$$

③より $\dfrac{\alpha+\delta}{2}=\dfrac{\beta+\gamma}{2}$ であるから、$y=f(x)$ は直線 $x=\dfrac{\alpha+\delta}{2}\left(=\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right)$ に関して対称である。(証明終)