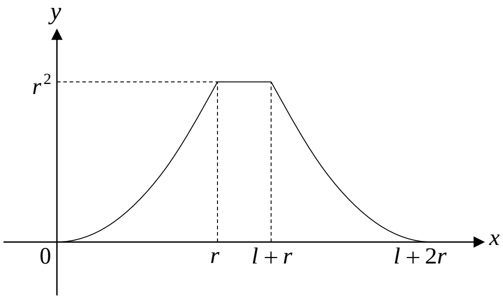
1976年東大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通

対称性より、この回転体の $0 \leqq x \leqq r$ の部分と、
$l+r \leqq x \leqq l+2r$ の部分の体積は同じ。



$$V = 2\pi\int_0^r x^4 dx + \pi r^4 l = 2\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^r + \pi r^4 l = \pi\left(\frac{2}{5}r^5 + r^4 l\right)$$

$r^2 + l = c$ より　$l = c - r^2 \geqq 0$　$0 \leqq r \leqq \sqrt{c}$

$$V = \pi\left\{\frac{2}{5}r^5 + r^4(c - r^2)\right\} = \pi\left(-r^6 + \frac{2}{5}r^5 + cr^4\right)$$

$f(r) = -r^6 + \dfrac{2}{5}r^5 + cr^4$ とおき、$0 \leqq r \leqq \sqrt{c}$ における増減を調べる。

$$f'(r) = -6r^5 + 2r^4 + 4cr^3 = -2r^3(3r^2 - r - 2c)$$

$3r^2 - r - 2c = 0$ を解くと　$r = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24c}}{6}$　$r \geqq 0$ より　$r = \dfrac{1+\sqrt{1+24c}}{6}$

ここで

$$6\sqrt{c} - (1+\sqrt{1+24c}) = \frac{(6\sqrt{c}-1)^2 - (1+24c)}{(6\sqrt{c}-1)+\sqrt{1+24c}} = \frac{36c - 12\sqrt{c} - 24c}{6\sqrt{c}+\sqrt{1+24c}-1} = \frac{12\sqrt{c}(\sqrt{c}-1)}{6\sqrt{c}+\sqrt{1+24c}-1}$$

$1 < c$ であれば　$\sqrt{c}(\sqrt{c}-1) > 0$　$6\sqrt{c} - (1+\sqrt{1+24c}) > 0$　$\therefore \sqrt{c} > \dfrac{1+\sqrt{1+24c}}{6}$

$0 < c \leqq 1$ であれば　$\sqrt{c}(\sqrt{c}-1) \leqq 0$　$6\sqrt{c} - (1+\sqrt{1+24c}) \leqq 0$　$\therefore \sqrt{c} \leqq \dfrac{1+\sqrt{1+24c}}{6}$

$1 < c$ のとき　$f(r)$ の増減は右の通り。

$r = \dfrac{1+\sqrt{1+24c}}{6}$ において最大となり、このとき

$$l = c - r^2 = c - \frac{1+12c+\sqrt{1+24c}}{18} = \frac{6c-1-\sqrt{1+24c}}{18}$$

r	0	$\cdots$	$\dfrac{1+\sqrt{1+24c}}{6}$	$\cdots$	$\sqrt{c}$
$f'(r)$		$+$	0	$-$	
$f(r)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$0 < c \leqq 1$ のとき　$f(r)$ は $0 \leqq r \leqq \sqrt{c}$ において単調増加。

$r = \sqrt{c}$ において最大となり、このとき $l = 0$。

r	0	$\cdots$	$\sqrt{c}$
$f'(r)$		$+$	
$f(r)$		$\nearrow$	

以上により、V の最大値を与える r と l は

$1 < c$ のとき　$r = \dfrac{1+\sqrt{1+24c}}{6},\ l = \dfrac{6c-1-\sqrt{1+24c}}{18}$　$0 < c \leqq 1$ のとき　$r = \sqrt{c},\ l = 0$　……(答)