1977年東大理$\boxed{6}$新文$\boxed{4}$新共通

ｉ）

$A(1,1,0),\ B(2,1,1),\ C(1,1,1),\ D(1,3,2)$ とすると　$\overrightarrow{AB}=(1,0,1),\ \overrightarrow{CD}=(0,2,1)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=(-2,-1,2)$ であるから、$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ の両方に垂直なベクトルの１つは　$\vec{k}=(2,1,-2)$

求める平面は $A(1,1,0)$ を通るから

$2(x-1)+(y-1)-2z=0\quad \therefore 2x+y-2z-3=0$ ……(答)

ｉｉ)

l 上の点 P は $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+s\\1\\s\end{pmatrix}$ と表せて、m 上の点 Q は $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1+2t\\1+t\end{pmatrix}$ と表せる。

$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}-s\\2t\\1-s+t\end{pmatrix}$ より、n 上の点は $\begin{pmatrix}1+s\\1\\s\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-s\\2t\\1-s+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+s(1-u)\\1+2tu\\u+s(1-u)+tu\end{pmatrix}$

これが $(2,0,1)$ に一致するとき $\begin{cases}1+s(1-u)=2 & \text{——①}\\1+2tu=0 & \text{——②}\\u+s(1-u)+tu=1 & \text{——③}\end{cases}$

①より　$s(1-u)=1$　②より　$tu=-\dfrac{1}{2}$　③に代入して　$u+1-\dfrac{1}{2}=1\quad\therefore u=\dfrac{1}{2}$

したがって　$\dfrac{1}{2}s=1\quad\therefore s=2\quad\dfrac{1}{2}t=-\dfrac{1}{2}\quad\therefore t=-1$

以上により、l と n の交点は $(3,1,2)$、m と n の交点は $(1,-1,0)$ ……(答)

1977 年東大文 $\boxed{4}$ 旧

$$
\begin{aligned}
a\cos 2\theta-4(a-2)\cos\theta-a+4&=a(2\cos^2\theta-1)-4(a-2)\cos\theta-a+4\\
&=2a\cos^2\theta-4(a-2)\cos\theta-2a+4=0
\end{aligned}
$$

$a=0$ のとき　$8\cos\theta+4=0$　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$　これを満たす θ は、$\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$ の 2 個。

$a\neq 0$ のとき

$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で、二次関数 $f(t)=2at^2-4(a-2)t-2a+4=2a\left(t-\dfrac{a-2}{a}\right)^2-\dfrac{4(a-1)(a-2)}{a}$ を考える。

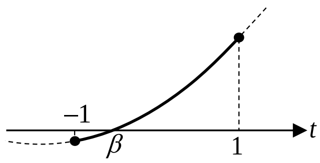
$f(-1)=2a+4(a-2)-2a+4=4a-4$　$f(1)=2a-4(a-2)-2a+4=-4a+12$

$a>0$ のとき　$f(t)$ は下に凸。

$0<a<1$ のとき　$1<\dfrac{1}{a}$　軸 $1-\dfrac{2}{a}<-1$　$f(-1)<0$　$f(1)>0$

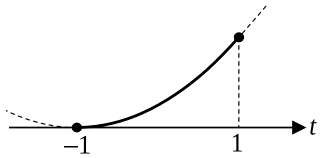
$f(t)=0$ は $-1<t<1$ において 1 つの実数解 β を持つ。

$\cos\theta=\beta$ を満たす θ は 2 個。



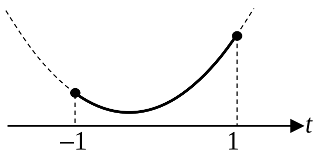
$a=1$ のとき　$f(t)=2t^2+4t+2=2(t+1)^2$

$f(t)=0$ の実数解は $t=-1$。$\cos\theta=-1$ を満たす θ は、$\theta=\pi$ の 1 個。



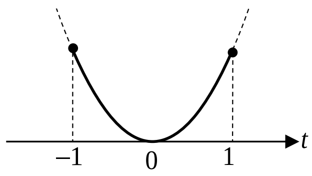
$1<a<2$ のとき　$(a-1)(a-2)<0$　$-\dfrac{4(a-1)(a-2)}{a}>0$

$f(t)=0$ は実数解を持たない。



$a=2$ のとき　$f(t)=4t^2$

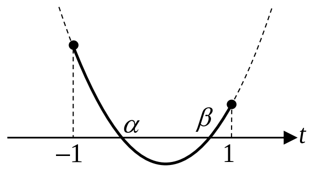
$f(t)=0$ の実数解は $t=0$。$\cos\theta=0$ を満たす θ は、$\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$ の 2 個。



$2<a<3$ のとき　$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{2}$　軸 $0<1-\dfrac{2}{a}<1$　$f(-1)>0$　$f(1)>0$

$f(t)=0$ は $-1<t<1$ において 2 つの実数解 $\alpha,\ \beta$ を持つ。

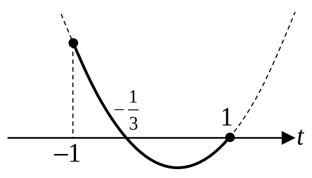
$\cos\theta=\alpha,\ \cos\theta=\beta$ を満たす θ はそれぞれ 2 個で、計 4 個。



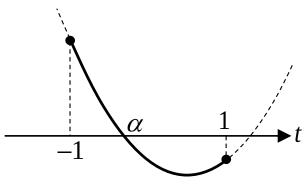
$a=3$ のとき　$f(t)=6t^2-4t-2=2(t-1)(3t+1)$

$f(t)=0$ の実数解は $t=-\dfrac{1}{3},\ 1$。$\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ を満たす θ は 2 個。

$\cos\theta=1$ を満たす θ は $\theta=0$ の 1 個。計 3 個。



$3<a$ のとき　軸 $0<1-\dfrac{2}{a}<1$　$f(-1)>0$　$f(1)<0$

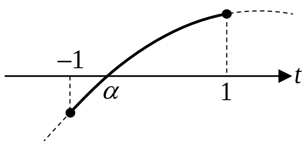


$f(t)=0$ は $-1<t<1$ において 1 つの実数解 α を持つ。

$\cos\theta=\alpha$ を満たす θ は 2 個。

$a<0$ のとき　$f(t)$ は上に凸。

軸 $1-\dfrac{2}{a}>1$　$f(-1)<0$　$f(1)>0$



$f(t)=0$ は $-1<t<1$ において 1 つの実数解 α を持つ。

$\cos\theta=\alpha$ を満たす θ は 2 個。

以上をまとめると

$$\begin{cases} 1<a<2 \text{のとき} & 0\text{個} \\ a=1 \text{のとき} & 1\text{個} \\ a<1,\ a=2,\ 3<a \text{のとき} & 2\text{個} \\ a=3 \text{のとき} & 3\text{個} \\ 2<a<3 \text{のとき} & 4\text{個} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$