1977 年東大理 $\boxed{2}$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{ab}$$

$a = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}$, $b = \sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2}$ であり、$\theta \leqq \pi$ とすると

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{a_1b_1+a_2b_2}{ab}\right)^2} = \sqrt{\frac{(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}{a^2b^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{a_1{}^2b_1{}^2 + a_1{}^2b_2{}^2 + a_2{}^2b_1{}^2 + a_2{}^2b_2{}^2 - a_1{}^2b_1{}^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2{}^2b_2{}^2}}{ab}$$

$$= \frac{\sqrt{a_1{}^2b_2{}^2 + a_2{}^2b_1{}^2 - 2a_1a_2b_1b_2}}{ab} = \frac{\sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}}{ab} = \frac{\left|a_1b_2 - a_2b_1\right|}{ab}$$

a_1, a_2, b_1, b_2 は有理数であるから、$a_1b_1 + a_2b_2$, $\left|a_1b_2 - a_2b_1\right|$ は有理数。したがって、
ab が有理数ならば、$\cos\theta$, $\sin\theta$ は有理数。
$\cos\theta$ が有理数ならば、ab は有理数であり、$\sin\theta$ は有理数。
$\sin\theta$ が有理数ならば、ab は有理数であり、$\cos\theta$ は有理数。

以上により、3 条件 i)、ii)、iii)は同値である。(証明終)