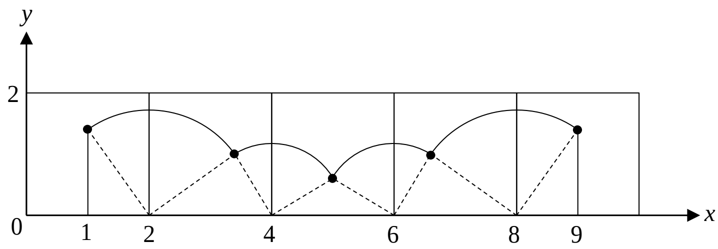
1977 年東大理 $\boxed{4}$

対称性から、$1 \leqq x \leqq 5$ の範囲で考えればよい。



まず、P は $A_2(2,\ 0)$ を中心に $90°$ 回転し、$(1,\ a)$ から $(2+a,\ 1)$ に移る。

このときの回転半径は、$\sqrt{1+a^2}$ であり、

P は円 $(x-2)^2+y^2=1+a^2$ 上を動く。

次に、P は $A_3(4,\ 0)$ を中心に $90°$ 回転し、$(2+a,\ 1)$ から $(5,\ 2-a)$ に移る。

このときの回転半径は、$\sqrt{1+(2-a)^2}=\sqrt{5-4a+a^2}$ であり、

P は円 $(x-4)^2+y^2=5-4a+a^2$ 上を動く。

求める体積は

$$
\begin{aligned}
V(a) &= 2\pi\int_1^{2+a}\left\{1+a^2-(x-2)^2\right\}dx+2\pi\int_{2+a}^{5}\left\{5-4a+a^2-(x-4)^2\right\}dx \\
&= 2\pi\left[(1+a^2)x-\frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^{2+a}+2\pi\left[(5-4a+a^2)x-\frac{(x-4)^3}{3}\right]_{2+a}^{5} \\
&= 2\pi\left\{(2+a)(1+a^2)-\frac{a^3}{3}-(1+a^2)-\frac{1}{3}+5(5-4a+a^2)-\frac{1}{3}-(2+a)(5-4a+a^2)+\frac{(a-2)^3}{3}\right\} \\
&= 2\pi\left\{2+a+2a^2+a^3-\frac{a^3}{3}-1-a^2-\frac{1}{3}+25-20a+5a^2-\frac{1}{3}-(10-3a-2a^2+a^3)+\frac{a^3-6a^2+12a-8}{3}\right\} \\
&= 2\pi\left\{2+a+2a^2-1-a^2-\frac{1}{3}+25-20a+5a^2-\frac{1}{3}-10+3a+2a^2-2a^2+4a-\frac{8}{3}\right\} \\
&= 2\pi\left(6a^2-12a+\frac{38}{3}\right)
\end{aligned}
$$
……(答)

$V(a)=2\pi\left(6(a^2-2a)+\frac{38}{3}\right)=2\pi\left\{6(a-1)^2+\frac{20}{3}\right\}$ より、$a=1$ のとき最小値 $\frac{40}{3}\pi$ をとる。……(答)