1977 年東大理 $\boxed{6}$ 新文 $\boxed{4}$ 新共通

ｉ)

$A(1,\ 1,\ 0),\ B(2,\ 1,\ 1),\ C(1,\ 1,\ 1),\ D(1,\ 3,\ 2)$ とすると　$\overrightarrow{AB}=(1,\ 0,\ 1),\ \overrightarrow{CD}=(0,\ 2,\ 1)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=(-2,\ -1,\ 2)$ であるから、$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ の両方に垂直なベクトルの 1 つは　$\vec{k}=(2,\ 1,\ -2)$

求める平面は $A(1,\ 1,\ 0)$ を通るから

$2(x-1)+(y-1)-2z=0\quad \therefore 2x+y-2z-3=0$ ……(答)

ｉｉ)

l 上の点 P は $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+s\\1\\s\end{pmatrix}$ と表せて、m 上の点 Q は $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1+2t\\1+t\end{pmatrix}$ と表せる。

$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}-s\\2t\\1-s+t\end{pmatrix}$ より、n 上の点は $\begin{pmatrix}1+s\\1\\s\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-s\\2t\\1-s+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+s(1-u)\\1+2tu\\u+s(1-u)+tu\end{pmatrix}$

これが $(2,\ 0,\ 1)$ に一致するとき $\begin{cases}1+s(1-u)=2 & \text{——①}\\ 1+2tu=0 & \text{——②}\\ u+s(1-u)+tu=1 & \text{——③}\end{cases}$

①より　$s(1-u)=1$　②より　$tu=-\dfrac{1}{2}$　③に代入して　$u+1-\dfrac{1}{2}=1\quad \therefore u=\dfrac{1}{2}$

したがって　$\dfrac{1}{2}s=1\quad \therefore s=2\quad \dfrac{1}{2}t=-\dfrac{1}{2}\quad \therefore t=-1$

以上により、l と n の交点は $(3,\ 1,\ 2)$ 、m と n の交点は $(1,\ -1,\ 0)$ ……(答)

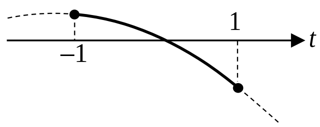
1977 年東大理 $\boxed{6}$ 旧

i）

$$f(x)=-\cos x-\frac{a}{4}\cos 2x=-\cos x-\frac{a}{4}(2\cos^2 x-1)=-\frac{a}{2}\cos^2 x-\cos x+\frac{a}{4}$$

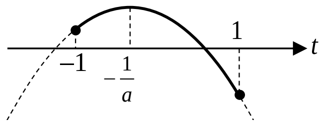
$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で、二次関数 $g(t)=-\frac{a}{2}t^2-t+\frac{a}{4}=-\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{a}{4}+\frac{1}{2a}$ の増減を考える。

$0<a\leqq 1$ のとき　軸 $-\frac{1}{a}\leqq -1$



$g(t)$ は $t=-1$ で最大値 $1-\frac{a}{4}$ 、$t=1$ で最小値 $-1-\frac{a}{4}$ をとる。

$1<a$ のとき　軸 $-\frac{1}{a}>-1$



$g(t)$ は $t=-\frac{1}{a}$ で最大値 $\frac{a}{4}+\frac{1}{2a}$ 、$t=1$ で最小値 $-1-\frac{a}{4}$ をとる。

以上により、最大値は $0<a\leqq 1$ のとき $1-\frac{a}{4}$ 、$1<a$ のとき $\frac{a}{4}+\frac{1}{2a}$ 。最小値は $-1-\frac{a}{4}$ 。……(答)

ii）

$$f'(x)=\sin x+\frac{a}{2}\sin 2x$$

$$f''(x)=\cos x+a\cos 2x=\cos x+a(2\cos^2 x-1)=2a\cos^2 x+\cos x-a$$

$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で、二次関数 $h(t)=2at^2+t-a=2a\left(t+\frac{1}{4a}\right)^2-a-\frac{1}{8a}$ の符号の変化を考える。

$h(t)=0$ を解くと $t=\frac{-1\pm\sqrt{1+8a^2}}{4a}$ であり、$t_1=\frac{-1-\sqrt{1+8a^2}}{4a}$, $t_2=\frac{-1+\sqrt{1+8a^2}}{4a}$ とおく。

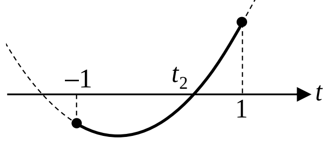
$h(-1)=2a-1-a=a-1$　　$h(0)=-a<0$　　$h(1)=a+1>0$

$0<a<1$ のとき　$h(-1)<0$

$h(t)=0$ は $0<t<1$ においてただ一つの実数解 $t=t_2$ を持つ。

$t_2<t\leqq 1$ のとき　$h(t)>0$　　$-1\leqq t<t_2$ のとき　$h(t)<0$

$t=t_2$ の前後で $h(t)$ の符号が変わる。



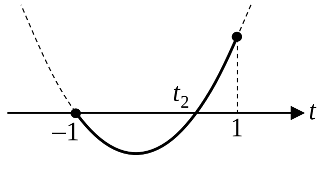
$a=1$ のとき　$h(-1)=0$

$h(t)=0$ は実数解 $t=-1$ および $0<t<1$ において $t=t_2$ を持つ。

$t_2<t\leqq 1$ のとき　$h(t)>0$　　$-1<t<t_2$ のとき　$h(t)<0$

$t=t_2$ の前後で $h(t)$ の符号が変わる。

$t=-1$ の前後で $h(t)$ の符号は変わらない。

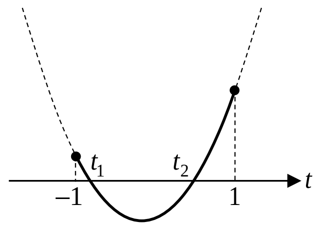


$0<a\leqq 1$ のとき、$f''(x)$ の符号の変化を考える。

$\cos x=t_2$ となる x が 2 つ存在し、それらを $\alpha,\ \beta\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi<\beta<2\pi\right)$ とする。

$f''(x)>0$ となるのは $t_2<\cos x$ のときで、$0\leqq x<\alpha,\ \beta<x\leqq 2\pi$
$f''(x)<0$ となるのは $-1<\cos x<t_2$ のときで、$0<a<1$ ならば $\alpha<x<\beta$、$a=1$ ならば $\alpha<x<\pi,\ \pi<x<\beta$
$a=1$ のとき、$f''(\pi)=0$ であるが、$x=\pi$ の前後で $f''(x)$ の符号は変わらない。
結局、いずれにしても、変曲点は $x=\alpha,\ \beta$ の 2 個。

$1<a$ のとき　$h(-1)>0$
$h(t)=0$ は $-1<t<0$ において実数解 $t=t_1$ を持ち、
$0<t<1$ において実数解 $t=t_2$ を持つ。
$-1\leqq t<t_1,\ t_2<t\leqq 1$ のとき　$h(t)>0$　$t_1<t<t_2$ のとき　$h(t)<0$
$t=t_1,\ t_2$ の前後で $h(t)$ 符号が変わる。



$1<a$ のとき、$f''(x)$ の符号の変化を考える。

$\cos x=t_2$ となる x が 2 つ存在し、それらを $\alpha,\ \beta\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi<\beta<2\pi\right)$ とする。

$\cos x=t_1$ となる x が 2 つ存在し、それらを $\gamma,\ \delta\left(\dfrac{\pi}{2}<\gamma<\pi<\delta<\dfrac{3}{2}\pi\right)$ とする。

$f''(x)>0$ となるのは $\cos x<t_1,\ t_2<\cos x$ のときで、$0\leqq x<\alpha,\ \gamma<x<\delta,\ \beta<x\leqq 2\pi$
$f''(x)<0$ となるのは $t_1<\cos x<t_2$ のときで、$\alpha<x<\gamma,\ \delta<x<\beta$
変曲点は $x=\alpha,\ \gamma,\ \delta,\ \beta$ の 4 個。

以上により
$0<a\leqq 1$ のとき変曲点は 2 個で、下に凸、上に凸、下に凸の順に変わる。
$1<a$ のとき変曲点は 4 個で、下に凸、上に凸、下に凸、上に凸、下に凸の順に変わる。