1978 年東大文 $\boxed{2}$

放物線(1)と(2)は、2 つの相違なる交点を持つから

$x^2-2x+2=-x^2+ax+b \quad 2x^2-(a+2)x+2-b=0 \quad D=(a+2)^2-8(2-b)>0$

$\therefore b>-\dfrac{1}{8}(a+2)^2+2$ ——①

①の条件下で、題意を満たす点 P の x 座標を α とすると

$2\alpha^2-(a+2)\alpha+2-b=0$ ——②

$(2\alpha-2)(-2\alpha+a)=-1$ ——③

③を整理すると　$(\alpha-1)(-2\alpha+a)=-2\alpha^2+(a+2)\alpha-a=-\dfrac{1}{2}$

これを②と辺々足すと　$2-b-a=-\dfrac{1}{2} \quad \therefore b=-a+\dfrac{5}{2}$ ——④

④を①に代入して整理すると　$-a+\dfrac{5}{2}>-\dfrac{1}{8}(a+2)^2+2 \quad (a+2)^2-16-8a+20=a^2-4a+8>0$

$a^2-4a+8=(a-2)^2+4>0$ であるから、すべての実数 a について、$a^2-4a+8>0$ が成立する。
すなわち、④が成立するとき、必ず①が成立する。

④が成立するとき、放物線(2)は

$y=-x^2+ax-a+\dfrac{5}{2}=-x^2+a(x-1)+\dfrac{5}{2}$

したがって、定点 $Q\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通る。……(答)