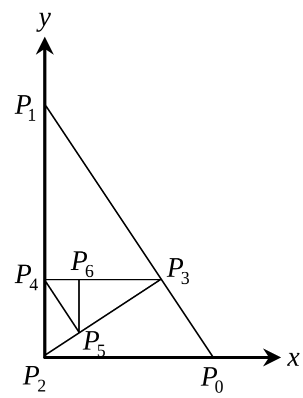
1979年東大理$\boxed{6}$

（1）



$\angle P_1P_0P_2=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと、$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}, \sin\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$で、

$P_0P_3=1\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$　$P_3P_1=a\cdot\sin\theta=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+1}}$　より、$P_0P_3:P_3P_1=1:a^2$

したがって、$P_2P_4:P_4P_1=1:a^2$で、P_4の座標は$\left(0,\dfrac{a}{a^2+1}\right)$

$P_2P_4:P_4P_3=1:a$より　$P_4P_3=\dfrac{a^2}{a^2+1}$　$P_4P_6:P_6P_3=1:a^2$より　$P_4P_6=\dfrac{a^2}{(a^2+1)^2}$

以上により、P_6の座標は$\left(\left(\dfrac{a}{a^2+1}\right)^2,\dfrac{a}{a^2+1}\right)$ ……(答)

(2)

$\overrightarrow{P_2P_6}=\left(\left(\dfrac{a}{a^2+1}\right)^2,\dfrac{a}{a^2+1}\right)$　$\triangle P_4P_5P_6$は$\triangle P_0P_1P_2$と180° 逆向きであり、相似比は$\left(\dfrac{a}{a^2+1}\right)^2$であるから

$\therefore\overrightarrow{P_6P_{10}}=-\left(\dfrac{a}{a^2+1}\right)^2\overrightarrow{P_2P_6}$　同様に、$\overrightarrow{P_{10}P_{14}}=\left(\dfrac{a}{a^2+1}\right)^4\overrightarrow{P_2P_6}$　$\therefore\overrightarrow{P_{4k-2}P_{4k+2}}=\left\{-\left(\dfrac{a}{a^2+1}\right)^2\right\}^{k-1}\overrightarrow{P_2P_6}$

$$\therefore\overrightarrow{P_2P_{4n+2}}=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{P_{4k-2}P_{4k+2}}=\frac{1-\left\{-\left(\dfrac{a}{a^2+1}\right)^2\right\}^n}{1+\left(\dfrac{a}{a^2+1}\right)^2}\overrightarrow{P_2P_6}=\frac{(a^2+1)^2}{a^4+3a^2+1}\cdot\left\{1-(-1)^n\left(\frac{a}{a^2+1}\right)^{2n}\right\}\overrightarrow{P_2P_6}$$

ここで、$1-\dfrac{a}{a^2+1}=\dfrac{a^2-a+1}{a^2+1}=\dfrac{1}{a^2+1}\left\{\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right\}>0$　$0<\dfrac{a}{a^2+1}<1$　$\therefore 0<\left(\dfrac{a}{a^2+1}\right)^2<1$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{P_2P_{4n+2}}=\frac{(a^2+1)^2}{a^4+3a^2+1}\overrightarrow{P_2P_6}$であるから、$P_1,P_2,\cdots,P_n,\cdots$が近づく点は

$\therefore\left(\dfrac{a^2}{a^4+3a^2+1},\dfrac{a(a^2+1)}{a^4+3a^2+1}\right)$ ……(答)