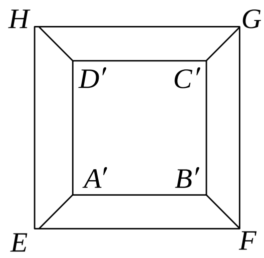
1980 年東大文 $\boxed{2}$



上底面 $ABCD$ の下底面 $EFGH$ への正射影を $A'B'C'D'$ とする。

線分 $A'B'$ と線分 EF の距離は $\dfrac{12-x}{2}$ である。

台形 $ABFE$ の高さ h は　$h=\sqrt{4^2+\left(6-\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{64+(12-x)^2}$

$$S(x)=\frac{1}{2}(12+x)h=\left(6+\frac{x}{2}\right)\sqrt{4^2+\left(6-\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}(12+x)\sqrt{64+(12-x)^2}$$

$f(x)=\left\{S(x)\right\}^2=\dfrac{1}{16}(12+x)^2\left\{64+(12-x)^2\right\}$ として、$2\leqq x\leqq 10$ における増減を調べる。

$$f'(x)=\frac{1}{8}(12+x)\left\{64+(12-x)^2\right\}+\frac{1}{8}(12+x)^2(x-12)=\frac{1}{8}(12+x)(64+x^2-24x+144+x^2-144)$$
$$=\frac{1}{8}(12+x)(2x^2-24x+64)=\frac{1}{4}(12+x)(x^2-12x+32)=\frac{1}{4}(12+x)(x-4)(x-8)$$

$f(x)$ の増減は右の通り。

x	2	$\cdots$	4	$\cdots$	8	$\cdots$	10
$f'(x)$		＋	0	－	0	＋	
$f(x)$		↗		↘		↗	

$f(2)=7^2(16+25)=49\cdot 41=2009$

$f(4)=8^2(16+16)=64\cdot 32=2024$

$f(8)=10^2(16+4)=100\cdot 20=2000$

$f(10)=11^2(16+1)=121\cdot 17=2057$

$f(x)$ は $x=10$ で最大、$x=8$ で最小となる。

したがって、$S(x)$ の最大値は $11\sqrt{17}$ $(x=10)$、最小値は $20\sqrt{5}$ $(x=8)$ ……(答)