1980 年東大文 $\boxed{4}$

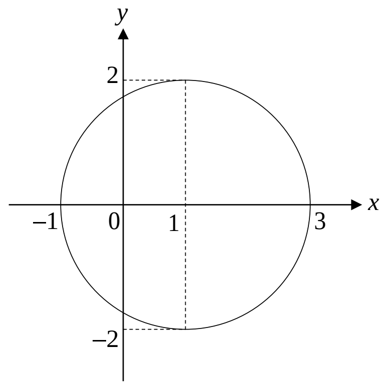
(1)

$$ZZ'-Z-Z'-3I$$
$$=(xI+yA)(xI-yA)-(xI+yA)-(xI-yA)-3I=x^2I-y^2A^2-2xI-3I=(x^2-2x-3)I-y^2A^2=O$$

$$(x^2-2x-3)I-y^2A^2$$
$$=\begin{pmatrix} x^2-2x-3 & 0 \\ 0 & x^2-2x-3 \end{pmatrix}-y^2\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2-2x-3 & 0 \\ 0 & x^2-2x-3 \end{pmatrix}-y^2\begin{pmatrix} a^2-b^2 & 0 \\ 0 & a^2-b^2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} x^2-2x-3 & 0 \\ 0 & x^2-2x-3 \end{pmatrix}-y^2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=(x^2-2x-3+y^2)I=O$$

したがって　$x^2-2x-3+y^2=0$　$\therefore (x-1)^2+y^2=4$

図示すると右図の通り。



(2)

$$Z=xI+yA=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+ay & by \\ -by & x-ay \end{pmatrix}$$
$$\det Z=(x+ay)(x-ay)+b^2y^2=x^2-(a^2-b^2)y^2=x^2+y^2$$

$x^2+y^2\neq 0$ であるから、Z は逆行列 Z^{-1} を持つ。

$$Z^{-1}=\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x-ay & -by \\ by & x+ay \end{pmatrix}=\frac{x}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\frac{y}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

したがって、$u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ とすれば、$Z^{-1}=uI+vA$ の形に表される。

ここで、$u^2+v^2=\dfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{1}{x^2+y^2}\neq 0$ より　$\therefore x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$, $y=-\dfrac{v}{u^2+v^2}$

(1) で求めた式に代入すると

$$(x-1)^2+y^2=\left(\frac{u}{u^2+v^2}-1\right)^2+\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}=4 \qquad (u^2+v^2-u)^2+v^2=4(u^2+v^2)^2$$
$$(u^2+v^2)^2-2u(u^2+v^2)+u^2+v^2=4(u^2+v^2)^2 \qquad (u^2+v^2)-2u+1=4(u^2+v^2)$$
$$3u^2+3v^2+2u-1=0 \qquad \therefore \left(u+\frac{1}{3}\right)^2+v^2=\frac{4}{9}$$

図示すると右図の通り。