1980年東大理 $\boxed{3}$

(1)

$$A=\sqrt{2}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\sqrt{2}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{4} & -\sin\dfrac{\pi}{4}\\ \sin\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4}\end{pmatrix}$$

であり、A は原点を中心とした $\dfrac{\pi}{4}$ 回転と $\sqrt{2}$ 倍の合成変換を表す。

$m \geqq 1$ として、$q_n=0$ となる条件を調べると、

$n=8m-7$ のとき　$A^n\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}=\left(\sqrt{2}\right)^{8m-7}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}=2^{4m-4}\begin{pmatrix}\alpha-1\\ \alpha+1\end{pmatrix}$　$\therefore \alpha=-1$　$n=8m-3$ でも $q_n=0$。

$n=8m-6$ のとき　$A^n\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}=\left(\sqrt{2}\right)^{8m-6}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}=2^{4m-3}\begin{pmatrix}-1\\ \alpha\end{pmatrix}$　$\therefore \alpha=0$　$n=8m-2$ でも $q_n=0$。

$n=8m-5$ のとき　$A^n\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}=\left(\sqrt{2}\right)^{8m-5}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}=2^{4m-3}\begin{pmatrix}-\alpha-1\\ \alpha-1\end{pmatrix}$　$\therefore \alpha=1$　$n=8m-1$ でも $q_n=0$。

$n=8m-4$ のとき　$A^n\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}=\left(\sqrt{2}\right)^{8m-4}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}=2^{4m-2}\begin{pmatrix}-\alpha\\ -1\end{pmatrix}$　$\therefore q_n\neq 0$　$n=8m$ でも $q_n\neq 0$。

以上により、ある n において $q_n=0$ となる α は　$\therefore \alpha=0,\pm 1$　……(答)

(2)

$n=8m-7,8m-3$ のとき　$a_n=\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}$　$n=8m-6,8m-2$ のとき　$a_n=-\dfrac{1}{\alpha}$

$n=8m-5,8m-1$ のとき　$a_n=-\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$　$n=8m-4,8m$ のとき　$a_n=\alpha$

したがって、$a_1,a_2,\ldots,a_n$ のうち異なるものの個数は最大4個である。

$\alpha=-\dfrac{1}{\alpha}$ とすると、$\alpha^2=-1$　$\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}=-\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$ とすると、$(\alpha-1)^2=-(\alpha+1)^2$　$\alpha^2=-1$

$\alpha=\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}$ とすると、$\alpha^2+\alpha=\alpha-1$　$\alpha^2=-1$　$\alpha=-\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$ とすると、$\alpha^2-\alpha=-\alpha-1$　$\alpha^2=-1$

$-\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}$ とすると、$\alpha^2-\alpha=-\alpha-1$　$\alpha^2=-1$　$-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$ とすると、$\alpha^2+\alpha=\alpha-1$　$\alpha^2=-1$

α は実数であるから $\alpha^2\neq -1$ であり、$\alpha,-\dfrac{1}{\alpha},\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1},-\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$ はすべて異なる。

以上により、$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ のうち異なるものの個数は、4個　……(答)