

$$A = 2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi \end{pmatrix} \text{より、} A \text{ は原点中心の } \frac{2}{3}\pi \text{ 回転と大きさ } 2 \text{ 倍の合成変換である。}$$

$m \geq 1$  として

$$\begin{aligned} n = 3m - 2 \text{ のとき } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= 2^{3m-2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2^{3m-2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 2^{3m-3} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} & d_n^2 = (a + 2^{3m-3})^2 + 3 \cdot 2^{6m-6} \\ n = 3m - 1 \text{ のとき } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= 2^{3m-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2^{3m-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 2^{3m-2} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} & d_n^2 = (a + 2^{3m-2})^2 + 3 \cdot 2^{6m-4} \\ n = 3m \text{ のとき } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= 2^{3m} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2^{3m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & d_n^2 = (a - 2^{3m})^2 \end{aligned}$$

これより、

$n = 3m - 2$  のとき

$$\begin{aligned} d_{n+1}^2 - d_n^2 &= (a + 2^{3m-2})^2 - (a + 2^{3m-3})^2 + 3 \cdot (2^{6m-4} - 2^{6m-6}) = (2^{3m-1} - 2^{3m-2})a + 4(2^{6m-4} - 2^{6m-6}) \\ &= 2^{3m-2} a + 3 \cdot 2^{6m-4} = 2^{3m-2} (a + 3 \cdot 2^{3m-2}) > 0 \quad \therefore a > -3 \cdot 2^{3m-2} \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$

$n = 3m - 1$  のとき

$$\begin{aligned} d_{n+1}^2 - d_n^2 &= (a - 2^{3m})^2 - (a + 2^{3m-2})^2 - 3 \cdot 2^{6m-4} = -(2^{3m+1} + 2^{3m-1})a + 2^{6m} - 2^{6m-2} \\ &= -5 \cdot 2^{3m-1} a + 3 \cdot 2^{6m-2} = 2^{3m-1} (-5a + 3 \cdot 2^{3m-1}) > 0 \quad \therefore a < \frac{3}{5} \cdot 2^{3m-1} \quad \text{--- ②} \end{aligned}$$

$n = 3m$  のとき

$$\begin{aligned} d_{n+1}^2 - d_n^2 &= (a + 2^{3m})^2 + 3 \cdot 2^{6m} - (a - 2^{3m})^2 = (2^{3m+1} + 2^{3m+1})a + 3 \cdot 2^{6m} \\ &= 2^{3m+2} a + 3 \cdot 2^{6m} = 2^{3m+2} (a + 3 \cdot 2^{3m-2}) > 0 \quad \therefore a > -3 \cdot 2^{3m-2} \quad \text{①と同じ} \end{aligned}$$

$$\text{①、②より } \therefore -3 \cdot 2^{3m-2} < a < \frac{3}{5} \cdot 2^{3m-1}$$

この範囲が最も狭くなるのは  $m = 1$  のときで、 $\therefore -6 < a < \frac{12}{5}$  …… (答)