1981 年東大文 $\boxed{3}$

(1)

曲線①上の点 $(t,\ 2t^2+1)$ における接線の式は　$y=4t(x-t)+2t^2+1=4tx-2t^2+1$

これが曲線②にも接するとき、$-x^2+c=4tx-2t^2+1$ とすると

$x^2+4tx-2t^2+1-c=0$ ――③

③が重解を持つから　$D/4=4t^2-(-2t^2+1-c)=6t^2-(1-c)=0$　$t^2=\dfrac{1-c}{6}$　$\therefore t=\pm\sqrt{\dfrac{1-c}{6}}$

$-2t^2+1=-2\cdot\dfrac{1-c}{6}+1=\dfrac{2+c}{3}$ であり、求める共通接線は　$\therefore y=\pm4\sqrt{\dfrac{1-c}{6}}x+\dfrac{2+c}{3}$　……(答)

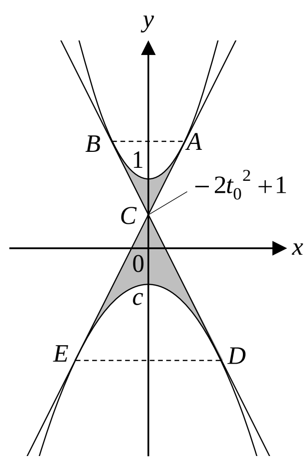
(2)

(1) で求めた共通接線の 1 つ $y=4\sqrt{\dfrac{1-c}{6}}x+\dfrac{2+c}{3}$ と、曲線②との接点の x 座標は

$$x^2+4\sqrt{\frac{1-c}{6}}x+\frac{2+c}{3}-c=x^2+4\sqrt{\frac{1-c}{6}}x+\frac{2(1-c)}{3}=0 \quad \left(x+2\sqrt{\frac{1-c}{6}}\right)^2=0 \quad \therefore x=-2\sqrt{\frac{1-c}{6}}$$

$t_0=\sqrt{\dfrac{1-c}{6}}$ とおく。共通接線 $y=\pm4t_0x-2t_0{}^2+1$ と、曲線①、②との接点の x 座標は、それぞれ $\pm t_0$、$\pm2t_0$。

また、切片 $\dfrac{2+c}{3}$ について、$1-\dfrac{2+c}{3}=\dfrac{1-c}{3}>0$、$\dfrac{2+c}{3}-c=\dfrac{2(1-c)}{3}>0$ より、$c<\dfrac{2+c}{3}<1$ が成り立つ。



右図において、直線 AB と曲線①で囲まれた領域の面積は

$$\int_{-t_0}^{t_0}\left\{(2t_0{}^2+1)-(2x^2+1)\right\}dx=2\int_{-t_0}^{t_0}(t_0+x)(t_0-x)dx=2\cdot\frac{(2t_0)^3}{6}=\frac{8}{3}t_0{}^3$$

三角形 ABC の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot2t_0\cdot\left\{2t_0{}^2+1-(-2t_0{}^2+1)\right\}=4t_0{}^3$

$\therefore S_1=4t_0{}^3-\dfrac{8}{3}t_0{}^3=\dfrac{4}{3}t_0{}^3$

直線 DE と曲線②で囲まれた領域の面積は

$$\int_{-2t_0}^{2t_0}\left\{(-x^2+c)-(-4t_0{}^2+c)\right\}dx=\int_{-2t_0}^{2t_0}(2t_0+x)(2t_0-x)dx=\frac{(4t_0)^3}{6}=\frac{32}{3}t_0{}^3$$

三角形 CDE の面積は、相似性より　$2^2\times4t_0{}^3=16t_0{}^3$

$\therefore S_2=16t_0{}^3-\dfrac{32}{3}t_0{}^3=\dfrac{16}{3}t_0{}^3$

以上により　$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{1}{4}$　……(答)