1982年東大文 2

$A(t-a,\ (t-a)^2),\ B(t,\ t^2),\ C(t+1,\ (t+1)^2)$ とおくと

AB の傾きは　$\dfrac{t^2-(t-a)^2}{a}=\dfrac{2at-a^2}{a}=2t-a$

AC の傾きは　$\dfrac{(t+1)^2-(t-a)^2}{1+a}=\dfrac{2(1+a)t+1-a^2}{1+a}=2t+1-a$

$2t-a=\tan\alpha,\ 2t+1-a=\tan\beta$ とおくと

$$\tan\angle CAB=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{(2t+1-a)-(2t-a)}{1+(2t+1-a)(2t-a)}=\frac{1}{(2t-a)^2+(2t-a)+1}=\frac{1}{\left(2t-a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$\tan\angle CAB$ が最大のとき、$\angle CAB$ は最大で、このとき　$2t-a+\dfrac{1}{2}=0$　$\therefore t=\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{4}$

$t-a=-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{4}$ より、A の座標は　$\therefore\left(-\dfrac{2a+1}{4},\ \dfrac{(2a+1)^2}{16}\right)$ ……(答)

また、$\overrightarrow{BA}=(-a,\ -2at+a^2)=\left(-a,\ \dfrac{1}{2}a\right)$、$\overrightarrow{BC}=(1,\ 2t+1)=\left(1,\ a+\dfrac{1}{2}\right)$ より

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-a+\frac{1}{2}a\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{4}a=\frac{1}{2}a\left(a-\frac{3}{2}\right)=0$$

$a>0$ より　$\therefore a=\dfrac{3}{2}$　……(答)