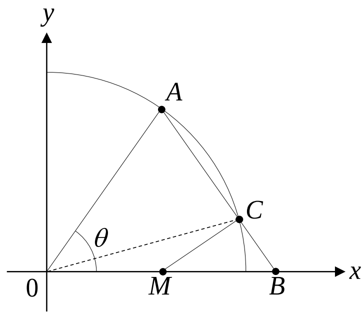
1982年東大理 $\boxed{3}$

(1)



$OA = AB = 1$ であるから三角形 OAB は二等辺三角形で、$\angle OBA = \theta$。

OA の傾きは $\tan\theta$ であるから、AB の傾きは $-\tan\theta$。

A における円の接線の傾きは、OA と直交するから $-\dfrac{1}{\tan\theta}$。

AB が円との交点 C を持つには　$-\dfrac{1}{\tan\theta} > -\tan\theta$　$\tan\theta > 1$　$\therefore \theta > \dfrac{\pi}{4}$

また、B の座標は $(2\cos\theta,\ 0)$ であり、$2\cos\theta > 1$ より　$\cos\theta > \dfrac{1}{2}$　$\therefore \theta < \dfrac{\pi}{3}$

以上により　$\therefore \dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ ……(答)

(2)

$OA = OC = 1$ であるから三角形 OAC は二等辺三角形で、$\angle OAB = \angle OCA = \pi - 2\theta$。

$$AC = 2\cos(\pi - 2\theta) = -2\cos 2\theta = -4\cos^2\theta + 2$$

$$\therefore BC = 1 - AC = 4\cos^2\theta - 1 \quad \text{……(答)}$$

(3)

$BM = \cos\theta,\ BC = 4\cos^2\theta - 1$ であるから、余弦定理より

$$\begin{aligned} CM^2 &= BC^2 + BM^2 - 2BC\cdot BM\cos\theta \\ &= (4\cos^2\theta - 1)^2 + \cos^2\theta - 2(4\cos^2\theta - 1)\cos^2\theta \\ &= 16\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 + \cos^2\theta - 8\cos^4\theta + 2\cos^2\theta \\ &= 8\cos^4\theta - 5\cos^2\theta + 1 = 8\left(\cos^2\theta - \frac{5}{16}\right)^2 + \frac{7}{32} \end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ であるから　$\dfrac{1}{2} < \cos\theta < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$\therefore \dfrac{1}{4} < \cos^2\theta < \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{4} < \dfrac{5}{16}$ であり、CM^2 は $\cos^2\theta = \dfrac{5}{16}$ のとき最小値 $\dfrac{7}{32}$ をとる。$\cos^2\theta \to \dfrac{1}{2} - 0$ のとき $CM^2 \to \dfrac{1}{2}$

したがって　$\dfrac{7}{32} \leqq CM^2 < \dfrac{1}{2}$　$\therefore \dfrac{\sqrt{14}}{8} \leqq CM < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ……(答)