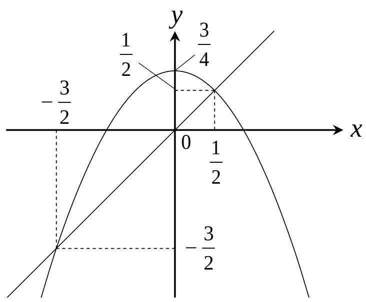
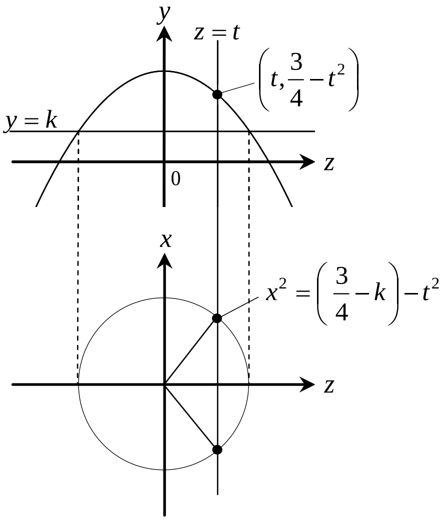
1983 年東大理 $\boxed{6}$

平面 H を $y=x$ とする。
曲面 K と平面 H で囲まれた立体の、
平面 $z=t$ による切り口を考える。





平面 $z=t$ と、平面 $y=k\left(k \leqq \frac{3}{4}-t^2\right)$ との

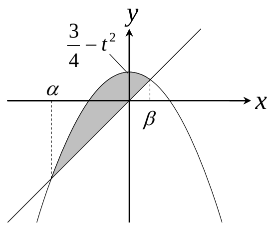
交差部を考えると、$x^2=\left(\frac{3}{4}-k\right)-t^2$ であるから、

曲面 K と平面 $z=t$ の交差部は、放物線 $y=\frac{3}{4}-t^2-x^2$ となる。

曲面 K と平面 H で囲まれた立体の平面 $z=t$ による切り口は、放物線 $y=\frac{3}{4}-t^2-x^2$

と直線 $y=x$ に囲まれた領域となる。交点の x 座標を $\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$ とすると、切り口の

面積は $\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$ で与えられる。



$\frac{3}{4}-t^2-x^2=x$ とすると、$x^2+x-\left(\frac{3}{4}-t^2\right)=0$ $\quad D=1+4\left(\frac{3}{4}-t^2\right)=4(1-t^2) \geqq 0$ より、$\therefore -1 \leqq t \leqq 1$

$\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=-\left(\frac{3}{4}-t^2\right)$ より、$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=D=4(1-t^2)$ $\quad \therefore \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}=\frac{4}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}$

求める体積は $\quad V=\int_{-1}^{1}\frac{4}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt=\frac{8}{3}\int_0^1(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt$ $\quad t=\sin\theta$ とおくと $\quad dt=\cos\theta\, d\theta$ $\quad \begin{array}{c|c} t & 0 \to 1 \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{2} \end{array}$

$$V=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\cdot\cos\theta\, d\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\, d\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{4}{3}\cos 2\theta+\frac{1}{3}\cos 4\theta\right)d\theta=\left[\theta+\frac{2}{3}\sin 2\theta+\frac{1}{12}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$