1983 年東大理 1 文 1 共通

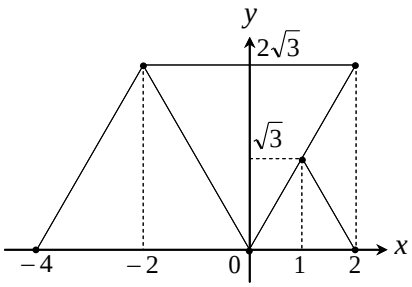
条件(2)より、$\begin{pmatrix}-2\\2\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+\sqrt{3}b\\c+\sqrt{3}d\end{pmatrix}$　$\therefore\begin{cases}a=-2-\sqrt{3}b\\c=2\sqrt{3}-\sqrt{3}d\end{cases}$ ——①

3 点 $(0,0),(1,\sqrt{3}),(2,0)$ を頂点とする正三角形を考える。

条件(1)により、この正三角形は f によって正三角形に移る。

$(0,0)$ は $(0,0)$ に、$(1,\sqrt{3})$ は $(-2,2\sqrt{3})$ に、それぞれ移るから、

$(2,0)$ は $(2,2\sqrt{3})$ か $(-4,0)$ に移らなければならない。



i)

$(2,0)$ が $(2,2\sqrt{3})$ に移るとき

$$\begin{pmatrix}2\\2\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-\sqrt{3}b&b\\2\sqrt{3}-\sqrt{3}d&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4-2\sqrt{3}b\\4\sqrt{3}-2\sqrt{3}d\end{pmatrix}\quad\therefore\begin{matrix}b=-\sqrt{3},d=1\\a=1,c=\sqrt{3}\end{matrix}\quad A=\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}&-\sin\frac{\pi}{3}\\\sin\frac{\pi}{3}&\cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$$

A は原点を中心とした $\frac{\pi}{3}$ 回転と、大きさ 2 倍の合成変換を表すから、任意の三角形を相似な三角形に移す。

ii)

$(2,0)$ が $(-4,0)$ に移るとき

$$\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4-2\sqrt{3}b\\4\sqrt{3}-2\sqrt{3}d\end{pmatrix}\quad\therefore\begin{matrix}b=0,d=2\\a=-2,c=0\end{matrix}\quad A=\begin{pmatrix}-2&0\\0&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$ より、A は y 軸に関する対称移動と、大きさ 2 倍の合成変換を表すから、任意の三角形を相似な三角形に移す。

以上により、

$$\therefore A=\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2&0\\0&2\end{pmatrix}$$ ……(答)