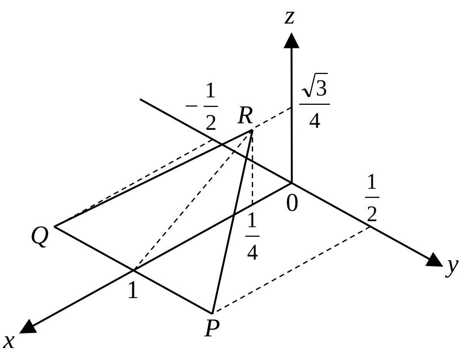
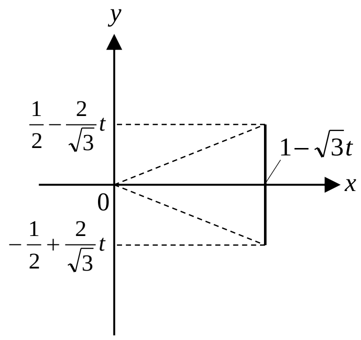
1984年東大理 $\boxed{4}$



正三角形 S は、平面 $z=\frac{\sqrt{3}}{3}(1-x)$ 内にある。

$z=t\left(0\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ のとき　$\sqrt{3}t=1-x$　$x=1-\sqrt{3}t$



また、$z=t$ が S から切り取る線分の長さは、$1-\frac{4}{\sqrt{3}}t$ であるから、

この線分の xy 平面への正射影は右図の通りで、z 軸中心に回転させると、

内径 $1-\sqrt{3}t$ 、外形 $\sqrt{(1-\sqrt{3}t)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2}$ のドーナツ型になる。

$z=t$ における切り口の面積は

$$S(t)=\pi\left\{(1-\sqrt{3}t)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2\right\}-\pi(1-\sqrt{3}t)^2=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-t\right)^2$$

求める体積は

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}}S(t)dt=\frac{4}{3}\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-t\right)^2dt=\frac{4}{3}\pi\left[\frac{1}{3}\left(t-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{64}=\frac{\sqrt{3}}{48}\pi \quad \cdots\cdots(答)$$