

$P(a, b)$ に関して $O(0, 0)$ と対称な点は $(2a, 2b)$ であるから、領域 U は $y \leq -(x-2a)^2 + 2b$ となる。

$D \cap E$ を図示すると右図の網掛部の通り。境界線を含む。

これより、以下の条件が成り立つ必要がある。

- i) $y = x^2$ と $y = -(x-2a)^2 + 2b$ が $x < 2$ において共有点を持ち、
 $x \geq 2$ では持たない。
- ii) $y = (x-4)^2$ と $y = -(x-2a)^2 + 2b$ が $x > 2$ において共有点を持ち、
 $x \leq 2$ では持たない。

i) のとき $x^2 = -(x-2a)^2 + 2b$ とすると
 $2x^2 - 4ax + 4a^2 - 2b = 0 \quad \therefore x^2 - 2ax + 2a^2 - b = 0$
 $f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 - b = (x-a)^2 + a^2 - b$ とおくと

軸について $a < 2$ ①
 $f(2) = 4 - 4a + 2a^2 - b > 0 \quad \therefore b < 2(a-1)^2 + 2$ ②
 $f(a) = a^2 - b \leq 0 \quad \therefore b \geq a^2$ ③

ii) のとき $(x-4)^2 = -(x-2a)^2 + 2b$ とすると
 $2x^2 - 4(a+2)x + 16 + 4a^2 - 2b = 0 \quad \therefore x^2 - 2(a+2)x + 8 + 2a^2 - b = 0$
 $g(x) = x^2 - 2(a+2)x + 8 + 2a^2 - b = \{x - (a+2)\}^2 + (a-2)^2 - b$ とおくと

軸について $a+2 > 2 \quad \therefore a > 0$ ④
 $f(2) = 4 - 4(a+2) + 8 + 2a^2 - b > 0 \quad \therefore b < 2(a-1)^2 + 2$ ②と同じ。
 $f(a+2) = (a-2)^2 - b \leq 0 \quad \therefore b \geq (a-2)^2$ ⑤

以上、①～⑤より
 $\therefore 0 < a < 2, b \geq a^2, b \geq (a-2)^2, b < 2(a-1)^2 + 2 \dots\dots$ (答)

これらを図示すると、右図の通り。境界線は実線部のみ含み、
 点 $(0, 4), (2, 4)$ は含まない。

