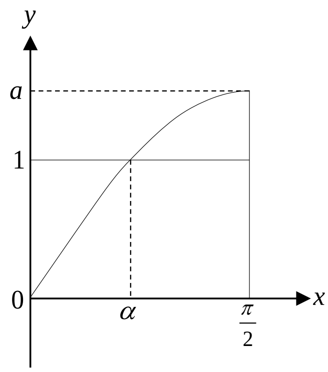
1985 年東大理 $\boxed{1}$

$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で、 $a\sin x = 1$ となる x を α とおく。



このとき

$$S_1 = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (a\sin x - 1)dx = \Big[-a\cos x - x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} = a\cos\alpha + \alpha - \frac{\pi}{2}$$

$$S_2 = \int_0^{\alpha} a\sin x dx + 1\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \Big[-a\cos x\Big]_0^{\alpha} + \frac{\pi}{2} - \alpha = a(1 - \cos\alpha) + \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$S_2 - S_1 = a(1 - 2\cos\alpha) + \pi - 2\alpha$$

$a\sin\alpha = 1$ より $a = \dfrac{1}{\sin\alpha}$ であるから　$\therefore S_2 - S_1 = \dfrac{1 - 2\cos\alpha}{\sin\alpha} + \pi - 2\alpha$

$f(\alpha) = \dfrac{1 - 2\cos\alpha}{\sin\alpha} + \pi - 2\alpha$ とすると

$$f'(\alpha) = \frac{2\sin\alpha\cdot\sin\alpha - (1 - 2\cos\alpha)\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - 2 = \frac{2\sin^2\alpha + \cos\alpha(2\cos\alpha - 1) - 2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha(2\cos\alpha - 1)}{\sin^2\alpha}$$

$f(\alpha)$ の増減は右の通りで、 $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ のとき最大。

α	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって、 $S_2 - S_1$ を最大にする a は　$a = \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ ……(答)

$S_2 - S_1$ の最大値は　$\pi - \dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{\pi}{3}$ ……(答)