1985 年東大理 $\boxed{4}$

(1)

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{pmatrix} \quad A^2=\begin{pmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ (a+b)(a-b) & b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a^2-b^2 & b^2 \end{pmatrix}$$

$A^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ a^n-b^n & b^n \end{pmatrix}$ と予想できるので、数学的帰納法で示す。$n=1$ のとき成立。

$n=k$ のとき　$A^k=\begin{pmatrix} a^k & 0 \\ a^k-b^k & b^k \end{pmatrix}$ と仮定すると、$A^{k+1}=\begin{pmatrix} a^k & 0 \\ a^k-b^k & b^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 \\ a^{k+1}-b^{k+1} & b^{k+1} \end{pmatrix}$

以上により示された。これより、$P_n\left(\frac{a^n}{2},\ \frac{a^n-b^n}{2}\right),\ Q_n\left(\frac{a^n}{2},\ \frac{a^n+b^n}{2}\right),\ R_n\left(a^n,\ a^n\right)$ であり、

$$\overline{P_nQ_n}^2=(b^n)^2=b^{2n} \quad \overline{Q_nR_n}^2=\left(\frac{a^n}{2}\right)^2+\left(\frac{a^n-b^n}{2}\right)^2=\frac{a^{2n}}{2}-\frac{a^nb^n}{2}+\frac{b^n}{4}$$

$$\overline{R_nP_n}^2=\left(\frac{a^n}{2}\right)^2+\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^2=\frac{a^{2n}}{2}+\frac{a^nb^n}{2}+\frac{b^n}{4}$$

$$\therefore f_n=3b^{2n}+2\left(\frac{a^{2n}}{2}-\frac{a^nb^n}{2}+\frac{b^n}{4}\right)+2\left(\frac{a^{2n}}{2}+\frac{a^nb^n}{2}+\frac{b^n}{4}\right)=2a^{2n}+4b^{2n} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

$ab=1$ であるから、$g(n)=2a^{2n}+\frac{4}{a^{2n}}$ とおくと

$$g'(n)=2a^{2n}\log a^2+\frac{4}{a^{2n}}\log\frac{1}{a^2}=4a^{2n}\log a-\frac{8}{a^{2n}}\log a=\frac{4(a^{4n}-2)}{a^{2n}}\log a$$

$a^4=1.1^4=1.4641>\sqrt{2}$ より、$n=1$ のとき $g'(n)<0$、$n\geqq 2$ のとき $g'(n)>0$ であるから $g(n)$ は単調増加。

$$g(1)-g(2)=2a^2+\frac{4}{a^2}-2a^4-\frac{4}{a^4}=\frac{2a^6+4a^2-2a^8-4}{a^4}=\frac{2(a^2-1)(2-a^6)}{a^4}$$

$a^6=1.1^6=1.771561$ より　$\therefore g(1)>g(2)$

したがって、f_n を最小にするのは　$\therefore n=2$　$\cdots\cdots(\text{答})$