1986年東大文 $\boxed{3}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_0^1 (bx^2+d)dx = 2\left[\frac{b}{3}x^3+dx\right]_0^1 = \frac{2}{3}b+2d \qquad (\because x^3, x\text{は奇関数})$$

$$\begin{aligned} uf(s)+vf(t) &= u(as^3+bs^2+cs+d)+v(at^3+bt^2+ct+d) \\ &= (s^3u+t^3v)a+(s^2u+t^2v)b+(su+tv)c+(u+v)d \end{aligned}$$

任意の a,b,c,d について $\int_{-1}^{1} f(x)dx = uf(s)+vf(t)$ が成立するためには

$$\begin{cases} s^3u+t^3v=0 & \text{——①} \\ s^2u+t^2v=\dfrac{2}{3} & \text{——②} \\ su+tv=0 & \text{——③} \\ u+v=2 & \text{——④} \end{cases}$$

③、④より　$(t-s)u=2t$　　$s<t$ より $s \neq t$ であるから、

$$\therefore u=\frac{2t}{t-s}, v=-\frac{2s}{t-s}$$

①に代入すると

$$\frac{2s^3t-2st^3}{t-s}=0 \quad st(s+t)(s-t)=0 \quad \therefore s+t=0 \quad \therefore t=-s$$

これより $u=v=1$ であり、②より

$$2s^2=\frac{2}{3} \quad s^2=\frac{1}{3} \qquad s<t \text{ より } \therefore s=-\frac{1}{\sqrt{3}}, t=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

以上により、

$$\therefore u=v=1, s=-\frac{1}{\sqrt{3}}, t=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$