1986 年東大理 $\boxed{4}$

(1)

$0.9 \leqq a \leqq 1.1$ より、$\dfrac{1}{1.1} \leqq \dfrac{1}{a} \leqq \dfrac{1}{0.9}$

$\dfrac{1}{a} = k\left(\dfrac{10}{11} \leqq k \leqq \dfrac{10}{9}\right)$ と固定すると、

$2.7k \leqq \dfrac{b}{a} \leqq 3.3k \quad 4.5k \leqq \dfrac{c}{a} \leqq 5.4k$

k を固定したとき、$P(u, v)$ の動く範囲は、

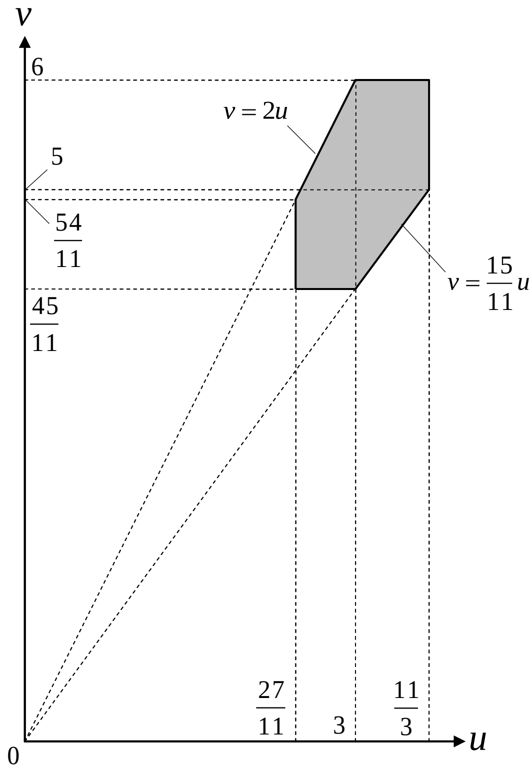
4 点 $(2.7k, 4.5k), (2.7k, 5.4k), (3.3k, 4.5k), (3.3k, 5.4k)$

を頂点とする長方形の周および内部である。

k を動かすと、これら 4 点は原点を通る直線上を動く。

k を動かしたとき、$P(u, v)$ の動く範囲は図の通り。

境界線を含む。



(2)

2 次方程式は $x^2 - 2ux + v = 0$ と書ける。(1) より、$D/4 = u^2 - v > \left(\dfrac{27}{11}\right)^2 - 6 = \dfrac{3}{121} > 0$

したがって、実数解を持つから、$z = u + \sqrt{u^2 - v}$

u を固定して考えると、z は v が最大のとき最小、v が最小のとき最大となる。

i) $\dfrac{27}{11} \leqq u \leqq 3$ のとき $\quad \dfrac{45}{11} \leqq v \leqq 2u \quad u + \sqrt{u^2 - 2u} \leqq z \leqq u + \sqrt{u^2 - \dfrac{45}{11}}$

$\dfrac{27}{11} \leqq u \leqq 3$ のとき、$u^2 - 2u = (u-1)^2 - 1$、$u^2 - \dfrac{45}{11}$ はともに単調増加であるから

$\dfrac{27}{11} + \sqrt{\left(\dfrac{16}{11}\right)^2 - 1} \leqq z \leqq 3 + \sqrt{9 - \dfrac{45}{11}} \quad \therefore \dfrac{27 + 3\sqrt{15}}{11} \leqq z \leqq 3 + \dfrac{3\sqrt{66}}{11}$

ii) $3 \leqq u \leqq \dfrac{11}{3}$ のとき $\quad \dfrac{15}{11}u \leqq v \leqq 6 \quad u + \sqrt{u^2 - 6} \leqq z \leqq u + \sqrt{u^2 - \dfrac{15}{11}u}$

$3 \leqq u \leqq \dfrac{11}{3}$ のとき、$u^2 - 6$、$u^2 - \dfrac{15}{11}u = \left(u - \dfrac{15}{22}\right)^2 - \dfrac{225}{484}$ はともに単調増加であるから

$3 + \sqrt{3} \leqq z \leqq \dfrac{11}{3} + \sqrt{\dfrac{121}{9} - 5} \quad \therefore 3 + \sqrt{3} \leqq z \leqq \dfrac{11 + 2\sqrt{19}}{3}$

$$\frac{27+3\sqrt{15}}{11}<\frac{27+3\cdot 4}{11}=3+\frac{6}{11}<3+\sqrt{3} \qquad 3+\frac{3\sqrt{66}}{11}<3+\frac{3\cdot 9}{11}=5+\frac{5}{11}<6<\frac{11+2\cdot 4}{3}<\frac{11+2\sqrt{19}}{3}$$

より、

最小値は$\dfrac{27+3\sqrt{15}}{11}\left(u=\dfrac{27}{11}, v=\dfrac{54}{11}\right)$、最大値は$\dfrac{11+2\sqrt{19}}{3}\left(u=\dfrac{11}{3}, v=5\right)$ ……(答)