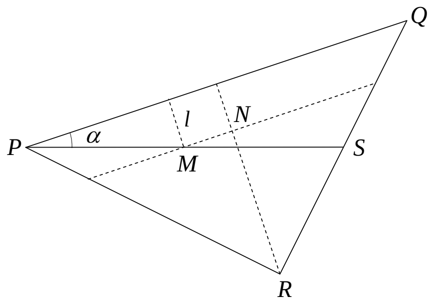
1986年東大理 $\boxed{6}$

(1)



右図において、$PR=\sqrt{2}$、$RS=\sqrt{2}\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$、$PS=2a$ で、

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\dfrac{1-m}{1+m}$ より

$$(2a)^2=2\left\{1+\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^2\right\}=\frac{4(1+m^2)}{(1+m)^2}\quad a^2=\frac{1+m^2}{(1+m)^2}\quad \therefore a=\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+m}$$

$\sin\alpha=m\cos\alpha$ より

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=(1+m^2)\cos^2\alpha=1\quad \cos^2\alpha=\frac{1}{1+m^2}\quad \therefore \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}},\sin\alpha=\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

$l=a\sin\alpha$ より　$\therefore l=a\sin\alpha=\dfrac{m}{1+m}$

楕円の中心 M を通り、グラスのふちに平行な切り口にできる円を考える。

この半径は $1-l$ であり、$MN=1-a\cos\alpha=1-\dfrac{1}{1+m}=\dfrac{m}{1+m}=l$ であるから、短半径 b は

$$b^2=(1-l)^2-l^2=1-2l=1-\frac{2m}{1+m}=\frac{1-m}{1+m}\quad \therefore b=\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}$$

以上より、$\therefore l=\dfrac{m}{1+m},\ a=\dfrac{\sqrt{1+m^2}}{1+m},\ b=\sqrt{\dfrac{1-m}{1+m}}$　……(答)

(2)

グラスを傾ける前の水量は $\dfrac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot 1=\dfrac{\pi}{3}$ であり、R から水面までの距離 h は

$$h=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right)=\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1-m}{\sqrt{1+m^2}}$$

であるから、

$$\frac{1}{3}\pi abh=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+m}\cdot\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}\cdot\frac{1-m}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{\pi}{6}\quad \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^3=\frac{1}{4}\quad \therefore \frac{1-m}{1+m}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\sqrt[3]{4}(1-m)=1+m\quad (\sqrt[3]{4}+1)m=\sqrt[3]{4}-1\quad \therefore m=\frac{\sqrt[3]{4}-1}{\sqrt[3]{4}+1}$$　……(答)