1987 年東大文 $\boxed{3}$

$f(t)=1+2at+b(2t^2-1)$

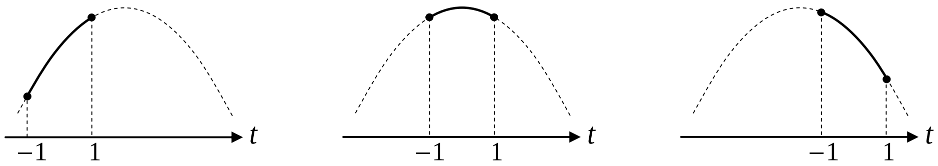
$b=0$ のとき　$f(t)=1+2at$　$f(-1)=1-2a\geqq 0$ かつ $f(1)=1+2a\geqq 0$ であればよく、$\therefore -\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq \dfrac{1}{2}$ ――①

$b\neq 0$ のとき

$$f(t)=2bt^2+2at+1-b=2b\left(t^2+\frac{a}{b}t\right)+1-b=2b\left\{\left(t+\frac{a}{2b}\right)^2-\frac{a^2}{4b^2}\right\}+1-b=2b\left(t+\frac{a}{2b}\right)^2+1-b-\frac{a^2}{2b}$$

$b<0$ のとき　$f(t)$ は上に凸で、$f(-1)\geqq 0$ かつ $f(1)\geqq 0$ であればよい。

$f(-1)=1-2a+b\geqq 0,\ f(1)=1+2a+b\geqq 0$　$\therefore b\geqq 2a-1,\ b\geqq -2a-1$ ――②



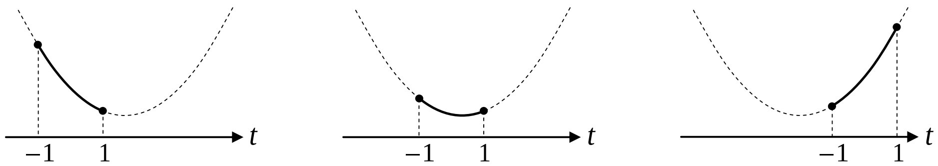
$b>0$ のとき　$f(t)$ は下に凸で、

$-\dfrac{a}{2b}\geqq 1$　$b\leqq -\dfrac{a}{2}$ のとき　$f(1)\geqq 0$　$\therefore b\geqq -2a-1$ ――③

$-1<-\dfrac{a}{2b}<1$　$b>-\dfrac{a}{2}$ かつ $b>\dfrac{a}{2}$ のとき　$f\left(-\dfrac{a}{2b}\right)=1-b-\dfrac{a^2}{2b}\geqq 0$

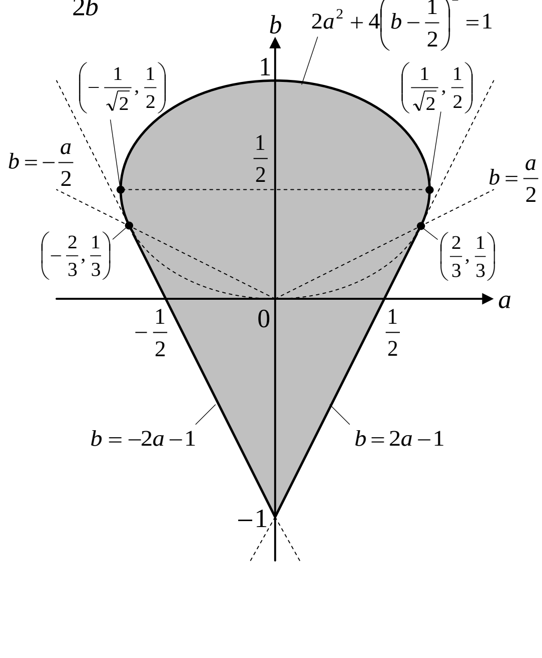
$2b-2b^2-a^2\geqq 0$　$a^2+2(b^2-b)\leqq 0$　$\therefore 2a^2+4\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2\leqq 1$ ――④

$-\dfrac{a}{2b}\leqq -1$　$b\leqq \dfrac{a}{2}$ のとき　$f(-1)\geqq 0$　$\therefore b\geqq 2a-1$ ――⑤



$1\leqq -\dfrac{a}{2b}$　　$-1<-\dfrac{a}{2b}<1$　　$-\dfrac{a}{2b}\leqq -1$

以上①～⑤をまとめると、(a,b) の存在範囲は右図の通り。境界線を含む。



直線 $b=-2a-1,\ b=2a-1$ は、それぞれ $\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right),\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ で

楕円 $2a^2+4\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2=1$ に接する。