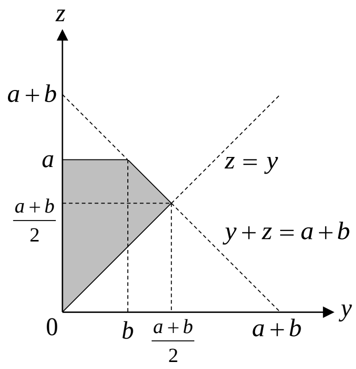
1987年東大文$\boxed{4}$

Rのうち、$0 \leqq x \leqq y \leqq z$を満たす部分を$R_{x \leqq y \leqq z}$とする。



$R_{x \leqq y \leqq z}$の体積を考える。

$\max(x,\ y,\ z) = z$、$\min(x,\ y,\ z) = x$であるから

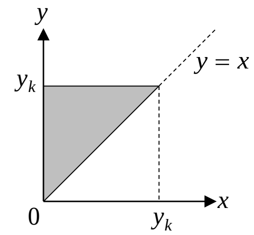
$z \leqq a$ ——①

$y + z \leqq a + b$ ——②

$0 \leqq y \leqq z$ ——③

①、②、③より、$y,\ z$がとり得る範囲は右図の通り。

$R_{x \leqq y \leqq z}$の$z = k\ (0 \leqq k \leqq a)$における断面を考える。



$z = k$において、yがとり得る最大値をy_kとすると、

$0 \leqq x \leqq y \leqq y_k$であるから断面は右図のようになり、

断面積は$\dfrac{1}{2}{y_k}^2$である。

$0 \leqq k \leqq \dfrac{a+b}{2}$のとき　$y_k = k$より、断面積は　$\dfrac{1}{2}k^2$

$\dfrac{a+b}{2} \leqq k \leqq a$のとき　$y_k = a + b - k$より、断面積は　$\dfrac{1}{2}(a+b-k)^2$

$R_{x \leqq y \leqq z}$の体積は

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{a+b}{2}} k^2 dk + \frac{1}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^{a} (a+b-k)^2 dk$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{k^3}{3}\right]_0^{\frac{a+b}{2}} + \frac{1}{2}\left[\frac{(k-a-b)^3}{3}\right]_{\frac{a+b}{2}}^{a} = \frac{(a+b)^3}{48} - \frac{b^3}{6} + \frac{(a+b)^3}{48} = \frac{(a+b)^3}{24} - \frac{b^3}{6}$$

対称性より、求めるRの体積はこの6倍であるから　$\therefore \dfrac{(a+b)^3}{4} - b^3$　……(答)

(注)

Rが表す立体を図示すると、右図のようになる。

図から体積を求めることもできるが、

対称性を利用する方が得策である。