1987 年東大理 $\boxed{2}$

曲線 C は $y=(x-a)^2+b$ となる。これと $y=\dfrac{1}{x}$ が接する点の x 座標を t とすると

$\dfrac{1}{t}=(t-a)^2+b$ ――① $-\dfrac{1}{t^2}=2(t-a)$ ――②

②より $t-a=-\dfrac{1}{2t^2}$ $\therefore a=t+\dfrac{1}{2t^2}$ ――③

①に代入して $\dfrac{1}{t}=(t-a)^2+b$ $\therefore b=\dfrac{1}{t}-(t-a)^2=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{4t^4}=\dfrac{4t^3-1}{4t^4}$ ――④

③より $\dfrac{da}{dt}=1-\dfrac{1}{t^3}=\dfrac{t^3-1}{t^3}=\dfrac{(t-1)(t^2+t+1)}{t^3}$

④より $\dfrac{db}{dt}=-\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t^5}=\dfrac{1-t^3}{t^5}=\dfrac{(1-t)(1+t+t^2)}{t^5}$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$\dfrac{da}{dt}$		$-$	0	$+$
$\dfrac{db}{dt}$		$+$	0	$-$
a		$\searrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$
b		$\nearrow$	$\dfrac{3}{4}$	$\searrow$

a は $t=1$ のとき最小値 $\dfrac{3}{2}$ をとり、b は $t=1$ のとき最大値 $\dfrac{3}{4}$ をとる。

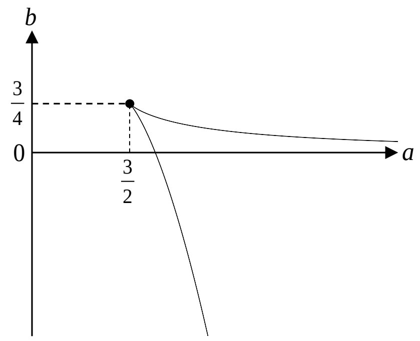
$t\neq 1$ のとき $\dfrac{db}{da}=\dfrac{\frac{db}{dt}}{\frac{db}{dt}}=-\dfrac{1}{t^2}<0$ $\dfrac{d^2b}{da^2}=\dfrac{d}{da}\left(\dfrac{db}{da}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{db}{da}\right)\cdot\dfrac{dt}{da}=\dfrac{2}{t^3}\cdot\dfrac{t^3}{t^3-1}=\dfrac{2}{t^3-1}$

$0<t<1$ のとき、b は a について単調減少で、上に凸。

$1<t$ のとき、b は a について単調減少で、下に凸。

$\displaystyle\lim_{t\to+0}a=\lim_{t\to+\infty}a=+\infty,\ \lim_{t\to+0}b=-\infty,\ \lim_{t\to+\infty}b=0$ であり、

点 $(a,\ b)$ の存在範囲の概形は右図の通り。



次に、$\dfrac{1}{x}=(x-a)^2+b$ を整理して

$x(x-a)^2+bx=1$ $x^3-2ax^2+(a^2+b)x-1=0$

$a=t+\dfrac{1}{2t^2},\ b=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{4t^4}$ を代入すると $x^3-\left(2t+\dfrac{1}{t^2}\right)x^2+\left(t^2+\dfrac{2}{t}\right)x-1=0$ $(x-t)^2\left(x-\dfrac{1}{t^2}\right)=0$

これが $x=t$ 以外の解を持たないとき $t=\dfrac{1}{t^2}$ $t^3=1$ $\therefore t=1$

したがって $\therefore a=\dfrac{3}{2},\ b=\dfrac{3}{4}$ ……(答)