1987 年東大理 $\boxed{6}$

(1)

直角三角形の斜辺になる 2 頂点は、1 と 4 、2 と 5 、3 と 6 のいずれかである。

例えば斜辺になる 2 頂点が 1 と 4 であるとき、もう 1 つの頂点は 2, 3, 5, 6 のいずれかであればよい。

直角三角形になるような 3 頂点の組は、$4\times3=12$ 通り。

$n=3$ のとき、3 個のサイコロとも相違なる目が出るから　$\therefore p_3=\dfrac{12\times3!}{6^3}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ ……(答)

$n=4$ のとき

4 個のサイコロとも相違なる目が出れば、必ず直角三角形が存在する。

そのような目の出方は　${}_6C_4\times4!=15\times24=360$ 通り。

4 個中 2 個の目が一致するとき、例えば直角三角形になる 3 頂点が (1, 2, 4) であるような目の組は、

(1, 1, 2, 4) か (1, 2, 2, 4) か (1, 2, 4, 4) の 3 通りであり、目の出方は　$12\times3\times\dfrac{4!}{2!1!1!}=432$ 通り。

$$\therefore p_4=\frac{360+432}{6^4}=\frac{36\times22}{6^4}=\frac{22}{36}=\frac{11}{18}\ \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

n 個のサイコロを振って直角三角形ができない場合を考える。

i) 1 種類の目しか出ないとき　確率は　$6\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

ii) 2 種類の目しか出ないとき　確率は　${}_6C_2\times(2^n-2)\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=15\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}$

iii) 3 種類の目が出て直角三角形ができないとき

連続した 3 頂点か、正三角形になる 3 頂点か、いずれかであり、該当する 3 頂点の組は、

(1, 2, 3) か (2, 3, 4) か (3, 4, 5) か (4, 5, 6) か (5, 6, 1) か (6, 1, 2) か (1, 3, 5) か (2, 4, 6) の 8 通りであるから

確率は　$8\times\left\{3^n-{}_3C_2(2^n-2)-3\right\}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=8\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+3\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}$

以上の和をとれば

$$\therefore 1-p_n=6\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+15\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}+8\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-3\left(\frac{1}{3}\right)^n+3\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=8\left(\frac{1}{2}\right)^n-9\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left\{8-9\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

$$\frac{1}{n}\log(1-p_n)=-\log2+\frac{1}{n}\log\left\{8-9\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\qquad\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)=-\log2\ \cdots\cdots(\text{答})$$