1988年東大文 $\boxed{1}$

直線 l を $y=0$ 、直線 m を $y=d(>0)$ とし、 $A(-5,\ 0),\ B(5,\ 0)$ とする。
動点 $P(x,\ d)$ が、 $x=p,\ p+5$ において、 $PA+PB=15$ を満たすとすると

$\sqrt{(p+5)^2+d^2}+\sqrt{(p-5)^2+d^2}=15 \quad \sqrt{(p+5)^2+d^2}=15-\sqrt{(p-5)^2+d^2}$

$(p+5)^2+d^2=225-30\sqrt{(p-5)^2+d^2}+(p-5)^2+d^2 \quad 30\sqrt{(p-5)^2+d^2}=225-20p \quad 6\sqrt{(p-5)^2+d^2}=45-4p$

$36(p^2-10p+25)+36d^2=2025-360p+16p^2 \quad \therefore 36d^2=1125-20p^2$ ——①

①は p を $p+5$ で置き換えても成立するから

$\therefore 36d^2=1125-20(p+5)^2=625-200p-20p^2$ ——②

①－②より

$0=500+200p \quad \therefore p=-\dfrac{5}{2}$

$36d^2=1125-20\cdot\dfrac{25}{4}=1125-125=1000 \quad d^2=\dfrac{250}{9} \quad \therefore d=\dfrac{5\sqrt{10}}{3}(m)$ ……(答)