1988 年東大文 $\boxed{3}$

$x+2z \leqq 4$ より　$0 \leqq x \leqq 4-2z$　$\therefore 0 \leqq z \leqq 2$

この立体の、$z=t$ $(0 \leqq t \leqq 2)$ による断面を考える。$0 \leqq x \leqq 4-2t,\ 0 \leqq y \leqq 1+t,\ x+y \leqq 3-t$

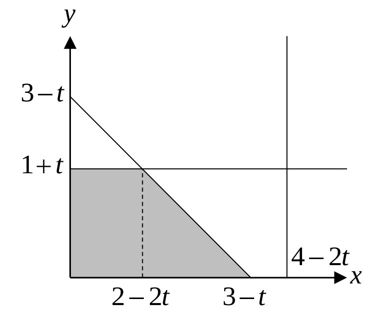
$(4-2t)-(3-t)=1-t,\ (1+t)-(3-t)=2t-2$ より

$0 \leqq t \leqq 1$ のとき　$1+t \leqq 3-t \leqq 4-2t$

$1 \leqq t \leqq 2$ のとき　$4-2t \leqq 3-t \leqq 1+t$

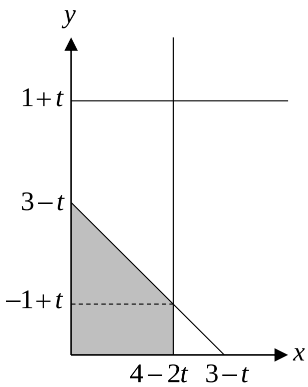
$0 \leqq t \leqq 1$ のとき　断面は右図の通りで、面積は

$$\frac{1}{2}(2-2t+3-t)(1+t)$$
$$=\frac{1}{2}(5-3t)(1+t)=-\frac{3}{2}t^2+t+\frac{5}{2}$$



$1 \leqq t \leqq 2$ のとき　断面は右図の通りで、面積は

$$\frac{1}{2}(-1+t+3-t)(4-2t)=4-2t$$



求める体積は

$$\int_0^1\left(-\frac{3}{2}t^2+t+\frac{5}{2}\right)dt+\int_1^2(4-2t)dt=\left[-\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t^2+\frac{5}{2}t\right]_0^1+\left[4t-t^2\right]_1^2=\frac{5}{2}+4-3=\frac{7}{2}$$ ……(答)